様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 3 月 31 日現在

機関番号：14501
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2010～2012
課題番号：22656026
研究課題名（和文）可積分系理論に基づく新しいムービングメッシュ数値計算スキームとその応用
研究課題名（英文）New moving mesh numerical scheme based on the theory of integrable systems and its applications
研究代表者
太田 泰広(OHTA YASUHIRO)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10213745

研究成果の概要（和文）：
非線形可積分系の差分化の理論を応用し、格子点が変数の値に応じて自動的に適切な位置に動いて解を安定高精度に記述するような、自動適応型のムービングメッシュ数値計算スキームを、様々な方程式系に対して構成した

研究成果の概要（英文）：
By applying the theory of discrete nonlinear integrable systems, self-adaptive moving mesh schemes are constructed for various equations, in which the grid points are driven and adapted automatically by solution so that the results become accurate and stable.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	600,000	0	600,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,800,000	360,000	2,160,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎、工学基礎
キーワード： 計算力学、可積分系

１．研究開始当初の背景

（１）水面波の運動を記述する.Camassa-Holm 方程式が三角波を表す厳密解をもつことに注目し、この方程式の差分化を試みた。

その結果、非線形可積分系の理論に基づいて解の定性的・定量的性質を不変に保つ差分化を行うことで、安定に三角波を再現できるスキームを開発した。

(2) 当初このような高機能の数値計算スキームを構成できるのは、Camassa-Holm方程式のようなごく限られた系だけだと考えられていたが、その後の研究で、短波長パルスの伝搬を記述する方程式に対しても同様の差分化が可能なことが明らかとなり、特異点を

もつ解を安定かつ高精度に再現できる差分スキームは、かなり広いクラスの方程式系に対して普遍的に存在するらしいことがわかってきた。

２．研究の目的

本研究では、これまでの研究を発展させて、より一般の可積分系を差分化することによって、様々な自動適応ムービングメッシュ数値計算スキームを構成し、その安定性や精度を確認した上で、それらを幾つかの物理学・工学の問題に応用していく。

３．研究の方法

可積分系に対する一般的なスケール変換を用いて、新しい非線形可積分系のヒエラルキーを構成する。
それらの具体的な解を、特異点の挙動に従って分類する。スケール変換によって構成された方程式系を、離散可積分系の理論に基づいて差分化することにより、新しい自動適応ムービングメッシュ数値計算スキームの系列を構成する。得られた自動適応ムービングメッシュ法のスキームを使って、特異点をもつ解やその相互作用を実際に数値計算してみることによって、スキームの精度と安定性を検証する。

４．研究成果

（１）Camassa-Holm 方程式の数値シミュレーションに対して、自動適応型のムービングメッシュ法を提案した。

これは厳密なN-ソリトン解をもつという意味において、可積分なスキームになっている。
この数値計算法は二つの主要な部分から成る。

第一に、数値計算格子は非一様であり、格子点は解に応じて自動的に適切な位置に動かされる。それ故にこの方法は自動適応ムービングメッシュ法と呼ばれる。

第二に、非一様な計算格子が新しい位置に動かされた後、三重対角の線形方程式系を解くことによって、次の時間ステップにおける解が決定される。

この二段階の計算方法によって、格子点の数が少ない場合においてさえ、計算結果の精度が非常によいことが幾つかの精度検証によって示された。

この方法は、Camassa-Holm 方程式の可積分な空間離散化に基づいており、離散系の N-ソリトン解は格子間隔を０に近づける極限において、元のCamassa-Holm方程式のN-ソリトン解を再現することが保証されている。

そのため、精度と計算コストの両方において優れた計算方法になっている。
時間発展にはEuler 前進差分と4次のRunge-Kutta法を用い、適当な初期値からピーコン列が生成される過程をシミュレートすることができた。

しかし4次のRunge-Kutta法を用いても、カスポンのように特異性の高い解を精度よく捉えることは困難であった。

（２）平面曲線の運動に付随するいくつかのソリトン方程式に対して、可積分性を保つ差分化を考察した。

それらはWadati-Konnno-Ichikawa弾性棒方程式、複素Dym方程式、短パルス方程式などを含む。

これらの方程式はホドグラフ変換によって、変形KdV方程式やsine-Gordoncn 方程式などと関係づけられる。
このホドグラフ変換は曲線の運動におけるEuler-Lagrange変換に相当しており、その事実に基づいてホドグラフ変換の離散類似を構成し、これらのソリトン方程式の可積分な離散化を行なった。
ここで用いられているホドグラフ変換は、水面波の運動を記述するCamassa-Holm方程式とAkNS型の浅水波方程式との間の関係を与える変数変換と同様のものであり、その離散化によって得られる離散可積分系は、Camassa-Holm方程式の離散化が与える自動適応ムービングメッシュ数値計算スキームと同様の構造をもつ。
様々なソリトン方程式に対する離散ホドグラフ変換の構造と性質を研究することにより、自動適応ムービングメッシュの新しい応用について考察した。

また、KdV 階層やポテンシャル変形KdV階層などの1+1次元の可積分系に対して、無限個の保存則を構成するための一般論をあらためて精査することによって、従来のホドグラフ変換の場合だけでなく、変換に現れる被積分関数が場の変数の微分を含む場合でも、方程式を連立系にすることによって閉じた系を構成できることを見出した。
このようなホドグラフ変換の拡張によってEuler-Lagrange変換をともなう可積分系のク

ラスを広げた。

（３）半離散ポテンシャル変形KdV方程式によって記述される離散平面曲線の連続時間的運動に対して、γ関数を用いた解の明示的な表示を与えた。
離散曲線のBäcklund変換について論じるとともに、連続極限をとることによって、滑らかな平面曲線の運動を記述するポテンシャル変形KdV方程式の解が得られることを示した。
退化Ostrovsky方程式と $A_2^{(2)}$型二次元戸田格子との間のホドグラフ変換を用いて、退化Ostrovsky方程式に対するNソリトン解を構成した。
γ関数は$A_2^{(2)}$型戸田格子の周期3簡約から得られ、praffianを用いて表現されることが明らかになった。
Degasperis-Procesi方程式に対して、ホドグラフ変換と整合性のよい双線形化を見出し、行列式およびをpraffian用いたNソリトン解の明示的な表示を与えた。
BKP系列とCKP 系列の双線形方程式を同時に用いるため、簡約の方法が特殊であり、3-簡約の擬簡約が重要になることを明らかにした。

双線形形式を離散化することによって、Degasperis-Procesi 方程式の可積分な空間離散化を構成した。
BKPとCKPの両方の双線形方程式に対して適切な離散化を与えるような簡約条件を明らかにし、その簡約条件のもとでの行列式とpraffianの間の対応関係を求めた。

Camassa-Holm方程式とDegasperis-Procesi方程式を比較すると、類似の方程式であっても解の構造を保存するような離散化を行うと、見かけ上まったく異なる半離散方程式が得られることが明らかとなり、離散化においては、ホドグラフ変換などの何らかの指針が重要になることがわかった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①B-F、Feng, K. Maruno and Y.ohta
On the γ-Functions of the Reduced Ostrovsky Equation and the $A_2^{(2)}$Two-Dimensional Toda System, J. Phys. A:Math.
査読有
Teor.45 (2012) 355203

②Y.ohta and J.Yang
General High-Order Rougue Waves and Their Dynamics in the Nonlinear SchrÖdinger Equation,Proc. R. soc.A
査読有
468 (2012) 17165-1740

③J. Inoguchi, K. Kajiwara, N, Matsuura and Y.Ohta
Explicit Solution to the Semi-Discrete Modified Kdv Equation and Motion of Discrete Plane Curves
J. Phys. A : Math. Teor
査読有　45
(2012) 045206

④Y. ohta, D, s.Wang and J.Yang
Genaral N-Dark-Dark Solutions in the Coupled Non-linear SchrÖdinger Equations ,stud.
Appl.Math
査読あり
127 (2011) 345-371

⑤B.-F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno and Y. ohta
Discrete Integrable Systems and Hodgreph Transformations Arising from Motions of Discrete Plane Curves
J. Phys
A: Math. Theor.
査読あり
44 (2011) 395201

⑥B.-F. Feng, K. Maruno and Y.ohta
A self-Adaptive Moving Mesh Method for the Camassa-Holm Equation, J. Compuut. Apple Mash.
査読あり
235 (2010) 229-243

〔学会発表〕

（計　４件）

① Y. ohta BKP with 2-reducation, Chine-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2013
17 Mar 2013
Kyoto,
Japan

②Y.ohta
Discretization of solution equations derived through hodograph transformation
2012 Tokyo Workshop on Structure-Preserving Methods

16 Jan 2012
Tokyo, Japan

③太田泰広
差分ソリトン方程式の話題
RIMS 研究集会「可積分系数理の進化」
2011 年、8 月 18 日
京都、日本

④Y. ohta
Discretization of integrable systems with hodograph transformation,
Satelite conference of the ICM 2010:Integrable Systems and Geometory
17 Aug 2010
Puducherry, India

６．研究組織

(1)研究代表者
太田　泰広(OHTA YASUHIRO)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10213745

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし