

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 3 月 31 日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010 ～ 2011

課題番号：22700016

研究課題名（和文） 有向木詰め込み問題の新展開

研究課題名（英文） New Developments in Arborescence Packing Problems

研究代表者

神山 直之 (KAMIYAMA NAOYUKI)

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 准教授

研究者番号：10548134

研究成果の概要（和文）：本研究課題では有向グラフ上の基本的な問題の一つである有向木の詰め込みに関する研究を行い、主に以下の三つの成果を得た。一つ目は、有向木の詰め込みを基準とした施設配置問題に対する多項式時間可解性および計算困難性の証明である。二つ目は、通常の有向木の詰め込み問題に重みを付した問題に対する、幾つかの最大最小定理である。三つ目としては、有向木の詰め込みに関する問題である優先集合を持つマトロイド交差問題に対する、DM 分解を用いたアルゴリズムである。

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied arborescence packing problems that is one of fundamental problems in directed graphs. Our main results can be described as follows. The first one is the polynomial-time solvability and intractability of the root location problem for arc-disjoint arborescences. The second one is the weighted version of the min-max theorem for arc-disjoint arborescences. The last one is the algorithm using a DM decomposition for the matroid intersection problem with priority constraints that is related to packing arborescences.

交付決定額

(金額単位：円)

|         | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|---------|-----------|---------|-----------|
| 2010 年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 2011 年度 | 900,000   | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度      |           |         |           |
| 年度      |           |         |           |
| 年度      |           |         |           |
| 総計      | 2,200,000 | 660,000 | 2,860,000 |

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：有向グラフ，有向木，グラフ詰め込み，配置問題

1. 研究開始当初の背景

都市における道路網やインターネットにおける接続網などのネットワーク上で生じる問題の多くは、点と線で表わされる有向グラフ上の最適化問題へと定式化され解決されてきた（図 1 参照）。そのような有向グラフ上の最適化問題の基本的なもののひとつとして有向木詰め込み問題がある。有向木詰め込

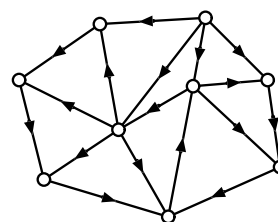


図 1: 有向グラフ

み問題とは、有向グラフ上の最適化問題の一つであり、有向グラフ  $D=(V,A)$  と特別な点である根  $r$ 、そして正の整数  $k$  が与えられたとき、 $k$  個の辺素な  $r$  を根とする全域的な有向木が存在するかどうかを判定し、もし存在するならばそれらの有向木を見つける問題である。ただし、有向木とは全ての辺が根から遠ざかる方向に向き付けられている根付き木である (図 2 参照)。また全域的とは全ての点を張っていることを意味している。

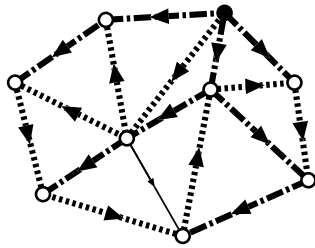


図 2：有向木の詰め込みの例。黒い点は根を表わしている。それぞれの破線は有向木を表わしている。

有向木は、通信ネットワークにおけるブロードキャスティングや都市における避難計画などへの応用があり、重要な問題の一つとなっている。さらに純粋なグラフ理論の研究においても、有向木詰め込み問題はマトロイドや劣モジュラ関数との関連性など、その豊かな構造のため中心的な問題の一つとして現在も活発に研究されている。

有向木詰め込み問題の研究の歴史において、最も重要かつ基本的な結果は、1973年に Jack Edmonds によって証明された有向グラフ上の有向木の詰め込みに関する最大最小定理である。この定理において Jack Edmonds は、根  $r$  から任意の点へ  $k$  本の辺素な道が存在するという明らかな必要条件が、 $k$  個の辺素な  $r$  を根とする全域有向木が存在する十分条件であることを証明した (図 2 参照)。この定理は離散最適化の分野において、Ford と Fulkerson によって示された最大フロー最小カット定理と並ぶ最重要定理の一つであるといえるが、その結果自体の重要性に加え、マトロイドとの関係、多項式時間アルゴリズムの開発、劣モジュラ関数の応用、グラフ上の抽象的被覆への一般化など、多くの理論的発展へ寄与した。しかし何年もの間、この Jack Edmonds の定理自体は真に拡張されることはなかった。しかし、2009年に申請者のグループはこの Jack Edmonds の定理の拡張に成功した。具体的には、与えられる特別な点の一つではなく複数存在する、詰め込む有向木が全域的ではなくその有向木の根から到達可能な点を張るという点で一般化となっている定理を証明した。この定理は、有向木による有向グラフの被覆のアルゴリズム、グ

ラフ上の抽象的被覆のさらなる一般化、グラフ上の凸性の概念の発見および Jack Edmonds の定理のさらなる一般化を導くなど、大きなインパクトを与えこの分野に新展開をもたらした。

## 2. 研究の目的

研究開始当初の背景でも述べたように、有向グラフ上の基本的な問題の一つである有向木詰め込み問題は、2009年の申請者のグループによる Jack Edmonds の定理の拡張を契機として、更なる発展を遂げつつある。本研究課題では、有向木詰め込み問題のこれまでの研究をさらに押し進め、新たな展開をもたらすことを目的とする。例えば、これまで考えられてきた概念を、近年提案されたグラフ上の凸性などの概念を用いて拡張することや、さらにこれまで考えられていない、新たな有向木の詰め込みに関する問題を提案およびその問題に対するアルゴリズムを開発することが具体的な目的となる。具体的には、これまで議論してきた有向木詰め込み問題においては、事前に根となる点を与えられていて、それらの根に関する有向木を求めることが目標となることが多くあった。しかし、ブロードキャストなどへの応用を考えると、それぞれの根の候補となる点にあるコストが与えられていて、コストを最小化するような根の配置自体と辺素な有向木を求める問題は非常に重要である。しかし、グラフ上の連結度を基準とした供給点配置問題はオペレーションズ・リサーチの分野で広く研究されているが、有向木を基準としたこのような根の配置問題はこれまで考えられていない。それゆえ、このように有向木を基準とする根の配置問題を数学的に定式化し解決することが望まれている。

## 3. 研究の方法

具体的な方法としては、新たな展開を目指す研究に関しては、広く離散最適化・グラフ理論の知識を習得し、問題の解決を目指す。例えば、以下の研究成果で述べる得られた結果に関して、有向木の詰め込みを基準とした根配置問題に関しては、離散最適化・グラフ理論の分野で深く研究されている連結度を基準とした施設配置問題に関する知見と、凸性をもつ有向木の詰め込みに関する知識を融合することにより新たな結果を得ることができた。また、重み付きの有向木詰め込み問題に関しては、離散構造的に有向木の詰め込み問題と非常に共通点の多い最短経路の詰め込みに関する知見と、Fulkerson による最小費用有向木問題に対するアルゴリズムの知見を合わせるにより結果を得ることができた。そして、優先集合を持つマトロイド交差問題に関しては、二部グラフ上のマッチ

ング問題の一つである階数極大マッチング問題に対するアルゴリズムに関する知見と、マトロイド交差問題に対する DM 分解に関する観察を融合させることにより新たな結果を得ることに成功した。

#### 4. 研究成果

本研究課題では有向グラフ上の基本的な問題の一つである有向木の詰め込みに関する研究を行い、主に以下の三つの成果を得た。一つ目は、有向木の詰め込みを基準とした施設配置問題に対する多項式時間可解性および計算困難性の証明である。二つ目は、通常の有向木の詰め込み問題に重みを付した問題に対する、幾つかの最大最小定理である。三つ目としては、有向木の詰め込みに関係する優先集合を持つマトロイド交差問題に対する、DM 分解を用いたアルゴリズムである。

一つ目の結果である有向木の詰め込みを基準とした根配置問題に関しては、まず比較的近いと思われるグラフ上の連結度を基準とした供給点配置問題を参考とし、自然で応用的にも有益なモデルを二つ提案することに成功した。一つ目の問題は、入力として有向グラフといくつかの被覆する集合が与えられているとき、この与えられた集合を被覆することのできる最小の重みの有向木の根を配置する問題である。二つ目の問題は、各点が被覆される需要数が与えられていて、各点を需要数以上被覆する最小重みの根を配置する問題である。これらの設定は非常に自然であり、有益な定式化を行うという当初の目的は果たすことができた。この二つの問題に対して、一般的には両方の問題とも NP 困難であることを証明した。さらに肯定的な結果としては、前者の被覆する集合が与えられている問題に対しては、与えられている集合が凸性をもつならば多項式時間で解くことができることを明らかにした。このグラフの点集合上の凸性という概念は比較的最近提案されたものであり、この概念が非常に有益であることを示す結果ともなっている。また、この問題に対する多項式時間アルゴリズムはグラフの点集合上の凸性および有向木の詰め込みに関する深い知識を用いたものである。

二つ目の結果である、通常の有向木の詰め込み問題に重みを付した問題に対する幾つかの最大最小定理に関しては、Jack Edmonds によって証明された通常の有向木の詰め込みに関する定理を重み付きの設定に拡張すると以下ようになる。辺に重みが付けられた根  $r$  を持つ有向グラフにおいて最小重み全域有向木を  $k$  個詰め込むことのできる必要十分条件は

どのようになるか。Jack Edmonds の重み無し版の最大最小定理を拡張すると以下のような予想が得られる。最小重み全域有向木を  $k$  個詰め込むことのできる必要十分条件は、最小重み全域有向木に含まれる辺によって構成される部分グラフにおける任意の  $r$ -カットのサイズが  $k$  以上である。この予想に関しては、Jack Edmonds の定理と同様必要性は明らかである。さらに、この二つの条件の間に位置する以下の条件との関係はどのようになるのだろうか。任意の  $k-1$  個の辺を取り除いても最小重み全域有向木の重みが変わらない。この予想と同様のものは、有向木と非常に似た離散構造である最短  $s-t$  パスにおいては成り立つため、この予想が有向木に対して成り立つと予想するのは非常に自然である。しかし、本研究課題において、これらの予想が一般に成り立たないことを示し、さらに部分的に予想が成り立つことを証明した。この結果は、さらに他の研究者による、最小重み全域有向木族の最小サイズの横断を求める問題に対するアルゴリズムを喚起するといった、有向木の詰め込み問題に対する新たな展開を生み出すことに成功したといえる。

そして三つ目の結果としては、重み付きの特殊な場合である優先的な辺の部分集合を持つ有向森を求める問題の一般化である優先集合をもつマトロイド交差問題に対して、二部グラフに対する既存のアルゴリズムの拡張を行った。この結果は、二部グラフ上のマッチング問題の一つである階数極大マッチング問題に対するアルゴリズムに関する知見と、マトロイド交差問題に対する DM 分解に関する観察を、融合することにより得られたものである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- (1) Satoru Fujishige and Naoyuki Kamiyama, The root location problem for arc-disjoint arborescences, Discrete Applied Mathematics, 採録決定 (査読有) .
- (2) Naoyuki Kamiyama, Robustness of minimum cost arborescences, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 採録決定 (査読有) .

[学会発表] (計 4 件)

- (1) 神山 直之, 優先度制約付きマトロイド交差問題, 冬の LA シンポジウム, 京都

大学, 2012年2月1日.

- (2) Naoyuki Kamiyama, Robustness of minimum cost arborescences, The 22nd International Symposium on Algorithms and Computation, ワークピア横浜, 2011年12月6日.
- (3) 神山 直之, 最小費用有向木のロバスト性に関する研究, 日本応用数学会 2011年度年会, 同志社大学, 2011年9月14.
- (4) 神山 直之, 有向木詰め込み問題の歴史と最先端, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, コラッセ福島 2010年9月17日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

神山 直之 (KAMIYAMA NAOYUKI)

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 准教授

研究者番号: 10548134