

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 27 日現在

機関番号：10104

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22730175

研究課題名（和文） 変数変換を伴う非定常時系列モデルの統計的推測とその経済の実証分析への応用

研究課題名（英文） Statistical inference of transformed non-stationary time series models and its applications to economic analysis.

研究代表者

寺坂 崇宏（TERASAKA TAKAHIRO）

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：60313920

研究成果の概要（和文）：

修正 Box-Cox 変換を伴う定常自己回帰移動平均モデルについて、新たに数値推定法を提案して、そのアルゴリズムのパフォーマンスについて確かめた。モデルの次数選択の面では、ほぼモデルの真の次数を推定することに成功して、また推定手続きについても、非常によく機能していることが分かった。また、このモデルを日本の株式データに適用した。

研究成果の概要（英文）：

I propose a new estimation procedure of the modified Box-Cox transformed stationary autoregressive-moving average models and examine the performance of the algorithm. The order selection is mostly successful and proposed estimation procedure works very well. I apply this model to the Japanese stock market data.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：経済学

科研費の分科・細目：経済統計

キーワード：Box-Cox 変換 時系列モデル

1. 研究開始当初の背景

（1）一般に変数の変換の目的は大きく分類すると 2 点にまとめられる。1 点目は、正規分布に近づけること、あるいは、計量経済モデルや時系列モデルの誤差項部分を正規分布に近づけること、さらには、誤差項が独立で同一の分布に従うという仮定を満足させることを目的としている。2 点目は、経済データの分析で用いられる変数の変化率（成長率、増加率）の推定の際の、対数差分による変化率の表現、弾力性の表現、経済モデルに

基づく変数間の非線形の関係を表現することにある。例えば、経済モデルでよく用いられるコブ＝ダグラス型生産関数や、それを含んだ、より一般の形状の CES 型生産関数は、明らかに変数に対して非線形であるが、これらは、変数変換の代表的なものである Box-Cox 変換を用いて特定化が可能である。この変換を用いた特定化の際には、変数の表現のほかに、モデルにおける誤差項が、正規分布、あるいは独立で同一の分布に従うことも併せて求められる。

(2) 前者の統計学的観点から当該研究を位置づけると、変数変換として良く知られている Box-Cox 変換は、変換のパラメータ λ の値が 0 のときには変数が対数に変換され、 λ の値が 0.5 のときは平方根に変換され、1 のときは基本的にはレベルに対応する変数に変換される特色を持つ。Box-Cox 変換には、変換後の変数の取りうる範囲の制約の存在があるが、この問題については、従前の研究で、修正 Box-Cox 変換を提案した。具体的には、変換する前の変数 x が (非常に小さい) δ 以下の時と (非常に大きい) m 以上の時には、変換後の値が $\log(x)$ に近づくような値を取ることに特徴がある。

さらに、Box-Cox 変換およびその修正変換などの変換を伴う多変量時系列モデルは、統計学的には変換を施すことで定常プロセスに従うような変数を対象に扱うものであるが、数値推定法や漸近共分散行列の評価、および検定にいくつかの発展的な課題があり、これらを解決する必要がある。さらにこのモデルを、非定常な変数についても扱えるように拡張することが望まれている。

2. 研究の目的

本研究は、モデルの誤差項について、統計学的な仮定を満足させ、かつ、経済の実証分析で経済学的に適切な関数の形状を表現できるような、変数変換を考慮した多変量時系列モデルの統計的推測と、その経済分析への応用を目的とする。具体的には下記の (1) ~ (3) であり、特に (1) を重視した。

(1) これまでの研究で確立した、変数変換を考慮した定常時系列モデルの数値推定法を改良して、推定時間の短縮と、推定の精度を向上させることとである。特に、モンテカルロ法による検定を利用するために、これらの向上は今後の経済分析をする上で不可欠である。

(2) 非定常データについても扱うことができるように、特に変数間の共分散関係をモデルに組み入れるように拡張し、その統計的な特性を明らかにして、かつ推定精度の高い数値推定法を提案する。

(3) 本来、非定常性や攪乱項の持つ仮定に注意を払いながら推定する必要がある、生産関数や雇用変動のミスマッチ等の実証分析に、提案する時系列モデルを活用して、経済の実証分析で、より学術的に適切な分析結果を出すことを目的とする。

3. 研究の方法

研究の目的を達成するために、計算速度の向上を図りつつ、推定アルゴリズムの修正を試みた。モデルにおける数値推定法について

は、本研究が開始される前年の Hosoya and Terasaka (2009) Journal of Econometrics で発表しているが、推定に当っては、シミュレーションによる精度の評価の計算時間について、1 回の計算で、少なくとも 3 分以上の時間がかかるという課題を抱えていた。また、計算を実施する際に、メモリを多く使用するような形でプログラムが書かれていたので、データ系列が長いものの推定や、変数の数を増やした形での推定は困難であるという問題を有していた。また、シミュレーションによる推定アルゴリズムの評価でも、さらなる推定精度を上げるための改良の必要性が認められた。そこで、以下の (1) (2) に記載した方法で改善を図った。

(1) 計算時のメモリの使用量の削減と計算時間の短縮について、旧プログラムでは、これまでのおよそ 15 年にわたって蓄積してきた Fortran77 で作成したルーチンを改良しつつ計算に利用してきた経緯があり、そのため、配列の演算では Fortran90 以降で使用可能になった動的割り当てを使用しないで作成を続けてきた。そのことが、メモリを無駄に使用してしまうことの原因となっていたので、旧プログラムを Fortran95 の形に書き換えて、併せて動的割り当てを全面的に導入することで、メモリの使用量の削減を目指した。

同時に、モジュールを積極的に利用して、配列における実引数と仮引数の整合性をチェックできるように修正を進め、プログラムの保守性を高め、さらに計算速度を速めるべく、コーディングについての修正を実施した。

これら一連のプログラムの修正には、機械で構文を Fortran77 から Fortran95 形式に書き直すのみでは不十分であり、特に保守性を向上させるためには、動的割り当てを積極的に導入する必要がある、そのために旧プログラムを全面的に書き直すことが求められたが、これを時間をかけて実施した。途中、東日本大震災の影響で、数値計算に使用している東北大学サイバーサイエンスセンターのスーパーコンピュータの利用が相当期間制限されたこともあり、その期間中は、PC 上で動く Fortran を用いて作業を実施した。

(2) 推定アルゴリズムの改良についてであるが、この提案しているモデルの推定には、最尤法を用いている。対数尤度関数を最適化する際には、過去の複数の論文で証明された結果から、修正 Box-Cox 変換の係数と、ARMA モデルの AR 係数及び MA 係数について、同時に推定を実施する必要がある。さらに、これの尤度関数は複雑な非線形の関数であるから、Newton 法や準 Newton 法に関連する最適化アルゴリズムを用いて、推定をしなければならぬ。よって、多くのモデルの係数の推定値を、非線形の最適化アルゴリズムを用いて同時に推定する必要が出てくる。

例えば、定数項とトレンド項のある3変量のAR次数が1、MAの次数が1のモデルであっても、推定される係数は27になる。このような状況では推定精度を上げることは困難ではあるものの、これらの問題をクリアしない限り、研究目的の第2、第3の目的を達成することは、非常に困難になるので、この作業も優先的に進めた。

具体的な改良であるが、修正Box-Cox変換を伴う多変量定常ARMAモデルにMA部分が含まれていない場合には、尤度関数の形状から、変換の係数 λ を与えた下においては、Anderson (1984) "An introduction to multivariate statistical analysis second edition" のTheorem. 3.2.1の結果を用いると、近似的にOLSで推定することで、AR係数の最適解が得られることが示される。

もし、尤度関数について、 λ の初期値を与えてAR係数を先に推定してしまい、その後 λ について最適化した場合は、 λ とAR係数は同時推定したことにならず、もし、この推定法を採用した場合は問題が生じる。

ただし、 λ の初期値を与えた下でAR係数をOLSで推定した後に、 λ について準Newton法で最適化する際、方向ベクトルを用いた直線探索をする段階で、探索に基づいて推定値の候補となった λ の更新値のもとでAR係数を推定しまい、このときの λ およびAR係数から尤度を計算して、その情報をもとにして、引き続き線形探索を進めた場合は、 λ とAR係数を同時に推定したと解釈できる。

なぜなら、本モデルの尤度関数の形状から、 λ を与えた時のAR係数の最適化問題は、最小二乗法によって必ず解けることが、Andersonの定理によって示されており、このことは、 λ についての非線形最適化問題を解く際に、 λ の新しい推定値のところでOLSを適用することで、その場所におけるAR係数の厳密な最適化問題を解くことになるからである。

λ とAR係数について尤度関数を適切な点で2次近似して、線形探索を実施することが準Newton法の通常の方法であるが、 λ の最適化問題の線形探索のところでOLSを組み合わせると、 λ については尤度関数を2次近似して更新値を見つけると同時に、その更新値におけるAR係数の最適点がOLSで見つけられ、見つけられた値を、AR係数の更新された値とすることで、ただ尤度関数を適切な点で2次近似して、 λ およびAR係数を線形探索で探すよりもより尤度の高いところで値が更新される。

上記の改良の結果、新たに書き直して修正したプログラムでは、3変数でデータの長さが500の場合では、計算が15秒前後で完了することも可能となり、これは旧プログラムの1/12の時間で計算が完了することを意味

する。この程度まで時間を短縮することで、実際の経済分析において、適用の範囲が相当広がると考えられる。

4. 研究成果

研究においては、研究目的の(1)に記載されている、修正Box-Cox変換を伴う多変量定常ARMAモデルの数値推定法について、その改良した推定法について成果が出たので、この部分については、ディスカッションペーパーの形で早急に報告したいと考えているが、その概要をここに記載する。

シミュレーションの計算に使用したモデルであるが、Hosoya and Terasaka(2009)の第3節のARMAモデル(3変数モデルで真の次数についてAR部分が1、MA部分が1のモデル)をそのまま利用した。

使用したモデルの1番目のケースでは、修正Box-Cox変換の δ が0.1でMが10000に設定している。これは、発生するデータの数パーセント程度が δ 以下となり、その場合に変換の修正が働くようにしている。

このケースでは、500回の計算のうち、推定が成功したのは499回であった。ただし、数値推定法で一致推定量を初期値として、 λ とARMA係数を同時推定した際には、初期値から値を改善することはなかった。

次数選択においては、真の次数を当てた回数が500回中484回であった。その他にAR次数が2でMA次数が1を選択した回数が12回、AR次数が3でMA次数が0を選択した回数が3回であった。変換の係数 λ については、真の値が(0.5, 0.0, 0.1)であるが、499回の推定した結果の平均値は、(0.506, 0.00442, -0.101)であった。また、平均二乗誤差については、(0.00006, 0.0003, 0.0005)であった。さらにAR係数の(1, 1)要素の真の値は0.7であるが、この係数の推定値の平均値は0.682、平均二乗誤差は1.7であった。

使用したモデルの2番目のケースでは、修正Box-Cox変換の δ が0.1のままであるが、Mが20に設定されている。これは、発生するデータの数パーセント程度が δ 以下のままであるが、他方M以上のところでデータの数パーセントが生成されて、そのときに変換の修正が働くようにしている。

500回の計算のうち、推定が成功したのは1番目のケースと同様に499回であった。また、数値推定法で一致推定量を初期値として、 λ とARMA係数を同時推定した際には、500回中11回で初期値から値が動いた。ただしその値の動きはごくわずかであった。

次数選択においても、結果はケース1と同じであった。変換の係数 λ については、真の値が(0.5, 0.0, 0.1)であるが、499回の推定した結果の平均値は、(0.506, 0.000933, -0.110)であった。また、平均二乗誤差につ

いては、(0.00006, 0.0003, 0.0007)であった。

これらの一連の結果は、提案した推定法がこの例に対しては非常に十分に機能していることを示していると解釈できる。その理由であるが、モデルを AR モデルで近似する際に、 λ が非常に真の値に近いところで推定されているが、 λ と AR 係数を切り離して推定するのではなく、AR 係数も同時に動かして推定していることが、この結果につながっていると思われる。

Hosoya and Terasaka(2009)の計算結果との比較については、本計算に使用した λ の初期値は(1.0, 1.0, 1.0)であったが、前者の計算のときの初期値は(0.0, 0.0, 0.0)であったので、判断に保留が求められる。ただし、このように初期値を推定した時には、劇的に推定が成功している事実が変わりはない。

実証分析では、このモデルを TOYOTA の株価データの日次データに適用した。データの期間は1996年1月4日から2004年12月30日である。

まず、データ対数差分に対してモデルを適用した。このモデルには定数項を入れている。推定結果であるが、選択された次数は AR 係数が1、MA 係数が0であった。推定された AR 係数は-0.108、定数項は-0.0001で、変換の λ については、1.002であった。また、残差の正規性の検定では、定常性を棄却する結果が出たので、この系列においては、誤差項の部分が正規分布に従わないと考えられるものの、従うような変換をみつけることはできなかったと考えられる。

他方、原系列についても、実験的にこのモデルを適用してみたが、残差の正規性の検定では、正規性の仮説を棄却しなかったものの、モデルの反転可能性の条件を満たさなかった。

今後は、さらに分析を進めていき、データ分析での推定が必ずしもうまくいかない背景についての考察が求められるが、そのためには、他の系列についても推定を進め、その結果を詳細に分析することが必要と思われる。さらにこの段階に目処がつき次第、研究目的の(2)(3)を達成すべく研究を進めて行きたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺坂 崇宏 (Terasaka Takahiro)

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：22730175