

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22730686

研究課題名(和文) 数学的活動と数学の活用の原理となるH.フロイデンタールの数学教育論の解明

研究課題名(英文) Reconsideration of the Didactics of Mathematics Proposed by Hans Freudenthal

研究代表者

伊藤 伸也 (ITO, Shinya)

金沢大学・学校教育系・准教授

研究者番号：10570434

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、数学的活動と数学の活用に重点をおく算数・数学の授業の原理と方法を解明することをモチーフとして、H.フロイデンタールの前期数学教育論の形成過程を踏まえた体系的な再構成に取り組んだ。フロイデンタールの数学教育論の中核となる概念である「追発明」について、その用語と意味、位置づけが変化していることを示し、その変化の意味を明らかにした。さらに、教授原理「追発明」を支える彼の数学観と人間観を確認し、教授原理「追発明」とそれに密接に関わる諸概念の意味と連関を考察した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to analyze and reconstruct the didactics of mathematics proposed by Hans Freudenthal in the 1960's and in the early 1970's. This study described the changing of German terms corresponding to the concept of "re-invention" from "Wiederentdeckung" to "Nacherfindung" and considered its significance. The meaning of "Wiederentdeckung", the didactical principle of "Nacherfindung" and concepts which have close relationship with the didactical principle was revealed. How Freudenthal's perceptions of mathematics and human being, the didactical principle and these concepts relate to each other was examined.

研究分野：教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：Hans Freudenthal ハンス・フロイデンタール 数学的活動 数学の活用 教授原理 追発明 数理化

### 1. 研究開始当初の背景

今日求められている算数・数学の授業は、子どもたちが本質的な数学的活動を行い、かつ、身につけた算数・数学を活用することを含むものである。我が国の現行の学習指導要領においても、算数的活動・数学的活動と算数・数学の活用の重視が明示されている。そのため、数学的活動や算数・数学の活用に重点をおく授業が模索されており、こうした授業の根源的な原理や方法の整理が求められている。

こうした授業の原理や方法を追究した 20 世紀を代表する数学教育学者としてハンス・フロイデンタール(Hans Freudenthal: 1905-1990)を挙げることができる。彼は、100 名以上のスタッフを擁する数学教育と科学教育の研究所であるオランダ・ユトレヒト大学フロイデンタール研究所(Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education、略称 FIsme)の前身となるユトレヒト大学数学教育開発研究所(Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs、略称 IOWO)の創始者・指導者であり、そこにおいて、数学的活動や数学の活用に重点をおく研究開発の理論的支柱であった。

フロイデンタールの数学教育論は、世界的にその影響がみられ、数学的活動や数学の活用に重点をおく今日の数学教育の理論・実践の世界的動向の基盤の一つである。たとえば、経済協力開発機構(略称 OECD)による「生徒の学習到達度調査」(略称 PISA)の「数学的リテラシー」の評価枠組み、フロイデンタール研究所が開発した数学教育の理論“Realistic Mathematics Education”(略称 RME)、アメリカ・ウィスコンシン大学マディソン校による数学カリキュラム“Mathematics in Context”(略称 MiC)、ドイツ・ドルトムント大学の数学教育のプロジェクト„mathe2000“は、彼の教育論を基礎とし、数学的活動や数学の活用に重点をおいている。我が国においても、彼の数学教育論に基づきあるいは“RME”や„mathe2000“を参照して、数学的活動や数学の活用に重点をおく研究や実践がなされてきた(たとえば、竹内・沢田 1984; Ohtani 2007; 岩崎 2007)。

ところが、フロイデンタールが自らの数学教育論を体系的に明確に表現しえていたわけではない。事実、彼の数学教育論は比喻や反語を用いた、いわば文学的表現が少なくなく、用いられる諸概念が漠然としていたり変化していたりすることが指摘されている。

こうした背景から、フロイデンタールの数学教育論の体系化とその特質の解明を目指して、内外において研究が重ねられてきた。たとえば、岡田禎雄は「追発明」をフロイデンタールの数学教育全体を貫く指導原理とし、これを支える概念として「意識化」と「数学化」を抽出し、フロイデンタールの数学教育論の再構成に取り組んだ(岡田 1987)。フ

ラフェメイヤー(Gravemeijer, K.)らは、「導かれた追発明」、「学習過程の水準」、「教授学的現象学」の概念を説明し、フロイデンタールの数学教育論の特質として、陶冶内容よりも学習過程に重点があることなどその一端を解明している。

### 2. 研究の目的

数学的活動と数学の活用に重点をおく算数・数学の授業の原理と方法を解明することをモチーフとして、本研究は、フロイデンタールの数学教育論、特にその前期数学教育論をその形成過程をふまえて体系的に再構成することを目的とする。この目的を達成するために、主に次の研究課題を定める。

(1) フロイデンタールの数学教育論の基底をなす観念を明らかにする。具体的には、フロイデンタールのいかなる数学観、人間観が彼の数学教育論の基底をなしているかを明らかにする。

(2) フロイデンタールの数学教授論の中核となる概念である「追発明」について、その用語と位置づけが変化していることを示す。

(3) 「追発明」概念の意味が変化していることを示し、「追発明」概念に係る変化の意味を解明する。

(4) 教授原理「追発明」とそれに密接に関わる諸概念の意味と構造を明らかにする。また、彼の数学教育論の基底をなす観念と、数学教授論の諸概念との連関について明らかにする。

### 3. 研究の方法

フロイデンタールの数学教育論の形成過程をふまえるために、本研究では基本的に彼の限定された文献を資料とし、解釈学的方法をとる。具体的には、数学教育に関する彼の文献リストにおける代表的著作『教育的課題としての数学』(1973)までの論文や著書等である。ただし、教授原理「追発明」に言及する文献に限り解釈学的循環の観点等から資料に加える。

また、本研究では、フロイデンタールの英語文献のみならず、ドイツ語文献を解釈の対象とする。その理由は次の通りである。第 1 に、フロイデンタールの母語がドイツ語であることである。フロイデンタールは 1905 年 9 月 17 日に、ドイツのブランデンブルク州ルッケンバルデ(Luckenwalde)に生まれ、ルッケンバルデのフリードリッヒシューレ(Friedrichschule)の未就学児童の教育施設(Vorschule)や改革実科ギムナジウム(Reformrealgymnasium)を経て、ベルリン大学で学んでいた。1930 年に、フロイデンタールはアムステルダムに移住したが、1927 年の夏学期のパリへの留学を除いてそれまでほとんど、彼はドイツにおいて教育を受けていた。第 2 に、フロイデンタールの数学教育に関する著作の原著は、必然的に、英語であることは稀であり、母語であるドイツ語が多い

ことである。たとえば、『教育的課題としての数学』は、もともとドイツ語で執筆された。また、数学教育に関する2番目の主著『数学教育の科学のための序文』(1978)の英語版の原作もドイツ語版である。

#### 4. 研究成果

(1) フロイデンタールは、『教育的課題としての数学』の中で、自らの数学の教育的解釈は、直観主義の主唱者であるブラウワー(Brouwer, L.E.J.)の影響によることを明かしている。実際、フロイデンタールの著書からは、直観主義の数学観とりわけ数学の人間の側面と活動的側面を特に強調する数学観が確認される。フロイデンタールは、『教育的課題としての数学』において、「活動としての数学」と「既成の所産としての数学」を対比し、「活動としての数学」をこそ重視した。「活動としての数学」とは、現実における経験を数学的方法で整理する「現実の数学化」の活動、そして、数学的経験を数学的方法で局所的に、さらには大局的に整理する「数学の数学化」の活動という、一連の「数学化」の活動である。また、数学は歴史的には役立つ活動として「現実の数学化」として始まったとする認識や、古代から現代に至るまで数学とその応用とが相互に密接に関連してきたとする認識も確認される。古代バビロニアにおける初等的な算術と代数から、偏微分方程式や関数解析といった現代数学に至る歴史的な展開についてのフロイデンタールによる考察から、これらの認識を指摘しうる。さらに、整理が意識的に高い段階においてもなされることを数学の特質とみる数学観や、現代数学を「古い数学の形式的な改作」とする数学観も見られる。

フロイデンタールによれば、「本能の欠如」のために「人間は他の生き物が本能によって与えられる多くの身体的精神的活動を学ばなければならない」。そしてまた、人間には責任を伴う選択が迫られており、選択することや、それに伴う責任を受け入れることを学ばなければならない。人間は、動物であれば生後直ちに与えられる祖先からの遺産を、「ニュルンベルクの漏斗」により強制されることなく、「受容と拒否の間の選択の自由という人間らしい状況」のもとで、獲得する機会を与えられていると認識していた。

(2) フロイデンタールは、論文「公理主義とは何か、そしてそれはどのような陶冶価値をもちうるか」(1963)の中で、自らが意図する数学の教授・学習のあり方を„Wiederentdeckung“や「導かれたWiederentdeckung (geführte Wiederentdeckung)」という語を用いて、英語文献における“re-invention”と対応させて表現していることが確認される。

1960年代から1970年代にかけて、フロイデンタールは、„Wiederentdeckung“という

語を„Nacherfindung“へと変化させ、1970年代以降は、自らが意図する数学の教授・学習を、英語文献における“re-invention”あるいは“reinvention”に対応させて、ドイツ語文献の中では„Nacherfindung“という語を用いて表現していた。実際、“Nacherfindung”という語が最初に用いられたのは論文「数学教授における新たな動向」(1971)においてであり、この論文において、フロイデンタールは、„Entdeckung“の教授学に関する記述の中で、自分自身が„Nacherfindung“という表現を好むことを明示的に記述していた。また、『教育的課題としての数学』の第6章の題目は、英語版においては“re-invention”であるのに対して、ドイツ語版においては„Nacherfindung“であり、しかも、その第6章の中で用いられた、英語版における“re-invention”の関連語に対応するドイツ語版における語は、„Entdeckung“の関連語は一つもなく、“Erfindung”の関連語である。

しかもフロイデンタールは、『教育的課題としての数学』において、„Nacherfindung“を「数学教育全体」の「研究レベルの教授原理」と位置づけることを明示的に確認していた。1960年代の彼の文献において、„Wiederentdeckung“概念に対して明示的に与えられてはいない、数学教育全体の研究レベルの教授原理としての位置づけを、フロイデンタールは„Nacherfindung“に与え、それを明記していたことが確認される。

(3) 1960年代にフロイデンタールが数学教授論において用いていた„Wiederentdeckung“とは、学習者が、数学史上の様式に制限されることなく、意図された数学の題材について、その「学習過程の段階」をふまえた一連の「数学化」をする活動を意味している。この一連の「数学化」とは、現実世界の現象を整理する「現実の数学化」の活動、そして、数学的な現象を局所的に、さらには大局的に整理する「数学の数学化」の活動のことである。実際、フロイデンタールは、„Wiederentdeckung“という用語を用いて、「現実の数学化」や「数学の数学化」と1960年代後半以降に表現される一連の「数学化」の活動を生徒に経験させていない当時の数学教育の状況を、1960年代前半においてすでに批判的に描写していた。フロイデンタールは、論文「公理主義とは何か、そしてそれはどのような陶冶価値をもちうるか」において、「空間における現象を数学的に整理すること」が幾何教授のはじめに位置するべきであるにもかかわらず、「数学的に整理されたことがらで始め」られ、「非数学的なことがらを自分自身で数学化するととてもすばらしい機会を奪い取られ、純粋数学と応用数学との重要な連関が閉ざされる」伝統的な数学教授を批判していた。さらに、「数学的なことがらを数学的な整理のより高い段階の上に新たに従わせること」を生徒に経験させてこなかっ

たことをも問題視した。フロイデンタールは、「数学的に整理すること、すなわち自分の直覚的な (instinktiv) 活動を数学化すること」を学ぶべきとする見解を示していた。また、フロイデンタールは、「Wiederentdeckung」概念を用いた 1960 年代前半、数学の教授・学習が数学史の様式にしたがうことに制限されるべきではないこと、そしてむしろ、数学史と異なる様式による数学の教授・学習の可能性を、「Wiederentdeckung」あるいは「reinvention」と関連づけて強調していた。「Wiederentdeckung」概念、とりわけ「Wieder」は、これらの強調の中で用いられていたことが論文「公理主義とは何か、そしてそれはどのような陶冶価値をもちうるか」から確認され、1960 年代の同時期の英語論文「論理的分析と批判的調査」(1962)においても、数学教授が数学史の様式にしたがった教授方法に制限されるべきではないことを強調していたことが確認される。

フロイデンタールは、1960 年代前半に、「Wiederentdeckung」という語を用いて示した、数学の教授・学習が数学史の様式にしたがうことに制限されるべきでないとする見解を、1970 年代以降、一転させていた。1970 年代以降、彼はむしろ、数学の教授・学習の順序を基本的には数学史上の順序と一致させるべきことを明示し強調していた。そしてその上で、フロイデンタールは、数学が教授されるべき順序は、数学が学習される順序であるとし、それは、数学が生徒によって発明される順序であるとした。このようにフロイデンタールによれば、数学の教授・学習のあるべき順序、言い換えると「教授学的に正しい道筋」は、数学が発明される順序であり、数学が「歴史において起こった」道筋なのである。フロイデンタールが意図する数学学習は、「発明者の歴史的足跡」そのものではなく、「修正され適切な道筋へと導かれた歴史解釈」にしたがう追体験的なものであった。「Nacherfindung」とは、学習者が、意図された数学の題材について、その学習過程の段階をふまえた一連の「数学化」を歴史上の過程に基本的に沿って行う追体験的活動を意味する。そして、教授原理「Nacherfindung」とは、数学教育全体において、学習者のこうした「Nacherfindung」の活動を要請する、研究レベルの教授原理である。

「Wiederentdeckung」から「Nacherfindung」への変化に見いだされる意味は次の通りである。ブルーナー (Bruner, J.S.) とディーンズ (Dienes, Z.D.) の「発見学習」においては重点がおかれていない一連の「数学化」の活動こそが、数学学習に要請されるべきことを明確化するという意味である。ブルーナーとディーンズの「発見学習」においては、高度な数学的概念を具体化したゲームに取り組むことに重点がおかれていたのに対して、教授原理「Nacherfindung」に基づく数学学習は、一連の「数学化」に重点をおくものであ

る。

(4) 教授原理「追発明」においては、「学習過程の不連続性」が前提とされている。フロイデンタールによれば、数学の学習過程は、段階のある不連続なものであり、しかも、数学学習においては学習過程の不連続なところこそが大切である。フロイデンタールによれば、学習過程の各段階の間には、ある論理的な関係があるとされ、この関係は次のように表現しうる。すなわち、低い段階の整理の方法が、その低い段階でなされた活動を反省することで、高い段階における整理の対象になる。

教授原理「追発明」は、数学学習に、現実世界の現象を整理する「現実の数学化」と、数学の世界の現象を局所的・大局的に整理する「数学の数学化」からなる一連の「数学化」を要請する。「数学化」概念は、教授原理「追発明」に基づく教授・学習過程の数学的側面、特に、個々の数学的な問題の解決を越えた、数学に特有の長期的な学習過程の在り方を規定している。

教授原理「追発明」に基づく教授方法は「追発明の方法」である。フロイデンタールは『教育的課題としての数学』において、プラトンの『メノン』に見出される「ソクラテス法」によって、数学の教授・学習過程の基本的なあり方を規定した。しかも、教授者による問への学習者による返答の制約が大きいという「ソクラテス法」の問題点をふまえ、「追発明の方法」は、より多様で主体的な学習を認めるものである。

なお、フロイデンタールの前期数学教育論において教授原理「追発明」概念を説明する際に、学習者の感情的側面に言及することはまれである。教授原理「追発明」に基づく教授・学習過程における学習者の心理的側面を規定する概念である「アハー体験」は、「指導のものと追発明」(1979)において取り上げられた。

教授原理「追発明」は、直観主義の理解に基づくフロイデンタールの「人間の活動としての数学」という見方に支えられている。「数学化」概念は、整理が意識的に高い段階においてもなされることを数学の特質とみる数学観や、現代数学を「古い数学の形式的な改作」とする数学観に支えられている。

教授原理「追発明」は、人間には「選択の自由という人間に特徴的な状況」のもとで、祖先からの遺産を獲得する機会が与えられているとする認識に基づいている。

本研究で得られた成果によって、フロイデンタールの数学教育論全体の形成過程をふまえた体系的再構成と特質の解明、さらには、数学的活動と数学の活用を実現する算数・数学科の授業を開発する「デザイン研究」への展望が得られた。

〔雑誌論文〕(計3件)

- (1) 伊藤伸也、「ユトレヒト大学フロイデーター研究所における“Realistic Mathematics Education”の継承に関する研究」、『金沢大学文化資源学研究』、査読無、12、pp.189-196、2013。
- (2) 伊藤伸也、「算数教育の国際的連携 - フロイデーター研究所における算数教育研究 - 」、『石川算数』、査読無、69、p.2、2013。
- (3) Itoh, S., “Structure of Didactical Principles in Hans Freudenthal’s Didactics of Mathematics”, The 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematics Education Pre-proceedings, 査読有, 1, p.7761, 2012.

〔図書〕(計1件)

- (1) 伊藤伸也、「数学科における数学的活動の展開」、『教科教育の理論と授業 理数編』(大高泉・清水美恵[編])、協同出版、117-129 ページ、2012。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 伸也 (ITOH, Shinya)  
金沢大学・学校教育系・准教授  
研究者番号：10570434