様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月 18 日現在

機関番号：17101
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：22730692
研究課題名（和文）数学科問題解決指導における問題の構成に関する実証的研究

研究課題名（英文）Empirical study on the teaching via problem solving in junior and high school mathematics focusing on the mental construction of problem

研究代表者
岩田　耕司（IWATA, KOJI）

福岡教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：90437541

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，学力調査の問題と結果を分析し，主として「図形の性質の証明」および「正弦定理」の導入に焦点を当てて授業の核となる問題や問題理解の場面における教師の役割について検討した。その結果，生徒が問題を問題として認識できるようにするための（特に，証明の対象が全称性の保証であることを理解できるようにするための）教師の役割として，問題やその解決の必要性を強調して説明することの効果は限定的であり，生徒自身が具体的な作業を通して問題（命題）を見出したり，限界を認識したりすることの有効性が示唆された。また，そのような活動は，数学の授業や学習方法に対する見方の変容にも寄与する可能性があることが分かった。

研究成果の概要（英文）：In this study, I examined the views and the actual state of academic ability in Japan, and investigated the role of the teacher in the stage of problem-understanding in teaching via problem solving, focusing on the teaching-learning process of the introduction to "geometrical proof" and "sine theorem". As a result, it is suggested that the effect of emphasizing on the necessity to solve the problem is limited for recognizing the problem as one's own problem. Instead, the effectiveness of finding a problem (proposition) through concrete activity and recognizing a limit of it was suggested. Besides, such an activity might contribute to the change of the students' view of the way of learning of mathematics.

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：数学教育　問題解決　実践研究

１．研究開始当初の背景

平成 19 年（2007 年）６月に一部改正された学校教育法では，小学校，中学校，高等学校において，「生涯にわたり学習する基盤が培われるよう，基礎的な知識及び技能を習得させるとともに，これらを活用して課題を解決するために必要な思考力，判断力，表現力その他の能力をはぐくみ，主体的に学習に取り組む態度を養うことに，特に意を用いなければならない」（学校教育法，第三十条第二項）ことが規定された。

算数・数学科教育においては，これら基礎的・基本的な知識・技能，思考力・判断力・表現力，学ぶ意欲を育む一つの方法として，問題解決型の学習が注目されている。しかしながら，我が国では，そのような問題解決型の学習の重要性を認める教師は多いものの，実際の教育現場，特に中学校や高等学校においては，そのような学習があまり実践されていないという現状が度々報告されている[1)]。

その現状を鑑み，筆者はこれまで，高等学校における創造的・問題解決的な数学の授業を実証的に検討してきた。その中で，問題解決指導においては，授業の核となる問題を生徒にとっての問題として，また，学習内容の本質に迫る問題として，有意味に構成していくことが極めて重要であることが示唆された。しかしながら一方で，そのような授業の核となる問題を，生徒にとっての問題として構成していくためには，問題等をどのように提示し，授業を展開すればよいのかといった，特に問題理解の場面における教師の役割について，十分なデータを基に検証できていない状況にあった。それゆえ，研究の対象を拡げ，中学校や高等学校におけるより多くの学習内容に対する創造的・問題解決的な授業の具体を明らかにするとともに，特に，授業の核となる問題や問題理解の場面における教師の役割について，より詳細に検討していく必要があると考えた。

２．研究の目的

以上のような認識のもとに，本研究では次の３点を明らかにすることを通して，中学校および高等学校数学科における問題解決指導の具体を開発するとともに，授業の核となる問題や問題理解の場面における教師の役割を明らかにすることを目的とする。

（1）各種学力調査の問題や結果を分析し，今求められている学力像とともに，生徒の理解や定着状況が芳しくない学習内容を明らかにする。

（2）（1）で明らかになった学習内容について，中学校および高等学校数学科の教科書を分析し，教科書が想定している教授・学習方法について，問題提示の場面における教師の役割が不明確である学習内容や，問題提示の方法に問題があると考えられる学習内容を明らかにする。

（3）（2）の結果に基づいて，授業実践の対象となる学習内容を選定し，生徒による問題の構成を重視した授業の効果や妥当性を検証する。

３．研究の方法

本研究の方法は，大きく「文献解釈的手法」と「授業実践による質的・量的なデータ分析」の２つに分類することができる。

（1）文献解釈的手法

①学力調査の問題や結果の分析

我が国の数学教育において求められている学力像や，生徒の理解や定着状況が芳しくない学習内容を明らかにするために，本研究では，平成 19 年度より実施されている全国・学力・学習状況調査（以下，全国調査）中学校数学の調査問題および調査結果を分析する。分析対象は，国立教育政策研究所のホームページ[2)]で公開されている「調査問題」,「解説資料」,「報告書」である。

②教科書分析・文献解釈

授業実践の対象となる学習内容について，中学校数学科教科書（平成 23 年検定）および高等学校数学科教科書（平成 23 年または平成 24 年検定）を，教師用指導書（教授資料）やその他関連する文献・資料等と併せて分析することで，教科書が想定している授業展開や指導方法を解釈する。

（2）授業実践による質的・量的データ分析

①予備調査

授業実践の対象となる学習内容について，被調査者の既習知識の習得状況や，在籍する学校・学年におけるクラス間の差を調べるための予備調査を実施し，授業実践等に係る実施上の留意点を明らかにする。

②授業実践による実証的研究

上記（1）の文献解釈的手法によって，生徒による問題の構成を重視した授業における教師の役割や授業展開等を仮説的に設定し，授業実践を通してその効果や妥当性について検証する。具体的には，生徒による問題の構成を重視した授業と，教科書の想定する授業展開を重視した授業の２つの授業を実施し，ＶＴＲによって記録され，プロトコルに起こされた授業の様子と授業後のアンケート結果とを併せて分析することで，仮説的に設定した教師の役割や授業展開の適切性，妥当性について検証する。

４．研究成果

本研究の主要な成果は，以下の諸点である。

（1）数学教育の求める学力像とその現状

全国調査の問題は，学習指導要領に示された内容の具体化であるとともに，算数・数学の学習における児童生徒の「あるべき姿」に対するメッセージとしての役割も担っているとみることができる。本研究では，全国調査中学校数学における主として「活用」に関する問題に焦点を当て，調査問題に込められた学力像とともに，それら学力に関する生徒の現状を分析した。

①数学の舞台に乗せること（数学化）

日常生活におけるできごとを数学と結び付けて考えたり判断したりするためには，まず問題を数学の舞台に乗せること，すなわち定式化することが必要である[3)]。平成20年度調査B$\boxed{5}$（以下，H20B$\boxed{5}$のように略記する）「富士山の気温」の問題では，「気温は，地上から1万mぐらいまでは，高さが高くなるのにともなって，ほぼ一定の割合で下がる」という情報をもとに，気温と標高の関係がどのような関係とみなせるかを判断したり，実際のデータから富士山の6合目（2500m）のおよその気温を求める方法を説明したりする問題が出題されている。正答率は，それぞれ25.0%，13.3%であった。学習した数学の知識・技能を実生活の場面で利用するためには，事象を理想化したり単純化したりして数学的な考察や処理ができるようにする必要があるが，そのような力が身に付いていない現状が伺える。

H19B$\boxed{5}$「水温の変化」の問題も基本的には同趣旨の問題であり，また，H21B$\boxed{1}$「紋切り遊び」やH22B$\boxed{5}$「机と道具箱」，H23B$\boxed{3}$「タレスの方法」では，日常的な事象を形や大きさ，位置関係など，図形に着目して観察し，その特徴を図形の性質と関連付けて捉える問題が出題されている。これらはともに，日常的な事象を数学の舞台に乗せる過程に着目した問題である。

②目的に応じて資料を収集・整理したり，必要な情報を選択・処理したりすること

実生活の場面では，数学の授業で通常用いられるようなよく定義された問題はほとんど存在しないと言ってよい。情報過多あるいは条件不足の問題ばかりである。それゆえ，目的に応じて資料を収集・整理したり，必要な情報を適切に選択・処理して判断したりすることが必要になる。H22B$\boxed{1}$「エクササイズ」の設問（2）では，条件に合うような運動の実施時間を求めるために，与えられた情報から必要な情報を選択して連立方程式を作ったり，その方程式を解いたりする問題が出題されたが正答率は41.6%であった。単純な文章題からの連立方程式の立式（例えば，H19A$\boxed{3}$（3））では正答率が7割程度であることを踏まえると，情報過多の場面での式の活用はまだまだ課題が多いと言える。

また，平成20年告示の中学校学習指導要領で新設された「資料の活用」領域からの初めての出題となるH23B$\boxed{5}$「甲子園大会」の問題や，H24B$\boxed{3}$「スキージャンプ」の問題も，収集・整理した資料をもとに，資料の傾向を的確に捉え，判断の理由を数学的な表現を用いて説明することが求められる問題である。数学的に完結した問題ばかりを考えるのではなく，情報過多の場面や条件不足の問題を考えることを通して，目的に応じて資料を収集・整理したり，必要な情報を選択・処理したりする学習指導が求められていることが分かる。

③証明や説明を読むこと，振り返って新たな性質を見いだすこと

主として「活用」に関する問題では，毎年度，文字式による説明や図形の証明に関する問題が出題されているが，その中では，証明（説明）を書くことだけではなく，証明（説明）を読むことも求められている。例えば，H19B$\boxed{2}$「連続する自然数の和」の設問（1）や，H20B$\boxed{4}$「重なりのある2つの三角形」，H21B$\boxed{2}$「3段目の数」の設問（3）では，文字式による説明や図形の証明を振り返り，新たな性質を見いだす問題が出題されている。事柄が成り立つことを証明（説明）して終わりにするのではなく，証明（説明）を振り返って考えることの大切さを教えてくれる問題である。

また，H19B$\boxed{4}$「垂直二等分線の性質の証明」では，与えられた証明の中にある誤りを指摘し，証明を正しく書き直す問題が出題されている。正答率は，それぞれ59.5%，49.0%であり，証明の中の誤りを指摘できた生徒のうち80.5%の生徒は，証明を正しく書き直すことができていた。証明を書くことだけでなく，証明を読むことの学習を充実させていくことが大切である。

④方針に基づいて証明したり，証明の方針を立てたりすること

文字式による説明や証明の学習においては，証明（説明）を読むこととともに，証明（説明）を構想する活動を取り入れることが大切である。証明（説明）を構想する際には，結論を導くために何が必要であるかを明らかにしたり，与えられた条件を整理したり，着目すべき性質や関係を見いだしたりするなどして，証明の方針を立てる必要がある。例えば，H21B$\boxed{4}$「中点で交わる2つの線分」では，2つの直線が平行となることを提示された方針に基づいて証明したり，別の方針を立てたりする問題が出題されている。正答率はそれぞれ41.8%，56.2%であった。H20B$\boxed{4}$「重なりのある2つの三角形」の設問（2）も基本的には同趣旨の問題であり，H20B$\boxed{2}$「位を入れかえた数」やH24B$\boxed{2}$「連続する自然数の和」の設問（2）では，文字式による説明の場面で，提示された方針に基づいて説明する問題が出題されている。

証明を書くこと，読むことともに，証明を構想することもまた，文字式や図形の証明（説明）の学習における重要な活動に位置付けられていることが分かる。

⑤関数的な見方や考え方を育むこと

実生活の場面では，ある数量を調べる際，その数量と依存関係にある別の数量に置きかえて考えることで，合理的に調べたり，予測したりすることがある。例えば，H20B$\boxed{1}$「身長の推定」では，上腕骨の長さと身長の間の関係をもとに福沢諭吉の身長などを推定する問題が出題されており，$\boxed{3}$「ベニヤ板と釘」では，ベニヤ板の枚数を厚さに置きかえたり，釘の本数を重さに置きかえたりして，

ベニヤ板の枚数や釘の本数を求める方法を説明することが求められている。このような場面では，事象における数量の関係を見いだしたり，その関係を的確に捉え，どのような関係が用いられているかを明らかにしたりすることが大切である。例えば，H23Ｂ$\boxed{1}$「ペットボトルキャップ」の設問（3）では，キャップのおよその個数を工夫して求める際に，どのような数量の関係が用いられているかを判断する問題が出題されている。また，H24Ｂ$\boxed{6}$「正多角形の外角」では，正多角形の頂点の数と１つの外角の大きさの関係を「…は…の関数である」という形で表現したり，この数量の関係がどのような関数であるかを判断し，その理由を説明したりすることが求められている。正答率はそれぞれ，19.3％と 25.4％であった。数量の関係を的確に捉え，表現することに課題があることが分かる。事象における数量の関係を見いだしたり，その関係を的確に捉えたりする学習を充実させる必要がある。

（2）教科書分析による知見

上記の学力観に基づき，本研究では，問題解決型の授業を想定した場合に，特に問題提示や問題理解の場面における教師の役割が不明確である学習内容を選定するために，中学校数学科教科書（平成 23 年検定，７社７種）を分析した。その結果得られた主要な知見は以下の通りである。

①中学校第１学年「関数」の導入について

前項の①と⑤，特に「関数的な見方や考え方を育むこと」に関わって，中学校第１学年の「関数」の導入における教科書の記述を分析した結果，１社を除き，関数的にみることの必要性やよさ（例えば，関数関係にある別の数量に置き換えることで，直接測ることのできない数量を，関数関係を利用して測ることができるようになることなど）に関する記述がほとんど見られず，単元末の「利用」の場面においてしか，明示的に指導する場面が設定されていないことが分かった。その結果，関数の導入の学習場面において，生徒が問題を問題として認識するための教師の役割が不明確であることが示唆された。

②中学校第２学年「図形の性質の証明」の導入について

前項の③と④に関わって，中学校第２学年の「図形の性質の証明」の導入における教科書の記述を分析した結果，教科書で証明問題として扱われている問題のほぼ全ての問題が，命題の全称性の保証を求めるタイプの問題であるのに対し，証明の目的が全称性の保証であることについての明示的な記述が教科書ではほとんど見られないことが分かった。それゆえ，何のために証明をしなければならないのかといった，問題を問題として認識できない生徒が多数いることが容易に想像される。事実，全国調査H21Ａ$\boxed{8}$「証明の意義」の問題（正答率 29.7%）からもそのような生徒が多く存在することが指摘されている。それゆえ，証明の導入において，証明の対象が全称性であることを理解できるようにするための教師の役割を明らかにする必要がある。

（3）授業実践による知見

本研究では，中学校および高等学校数学科の問題解決型の授業における問題提示や問題理解の場面における教師の役割を共通の視点で検討するために，前項で明らかになった課題の中から，特に「図形の性質の証明」に焦点化して授業実践を計画・実施することにした。

①中学校第２学年「図形の性質の証明」の教授・学習過程に関する知見

中学校第２学年「図形の性質の証明」の授業実践を行うにあたり，福岡県内の公立中学校１校（５クラス）の協力を得て，事前に三角形の合同条件がどの程度定着しているかを調べる調査を行った。その結果，適切な合同条件を用いて三角形の合同を説明できた生徒の割合が５クラスともに９割を超えており，クラス間に出来・不出来の差も見られなかったことから，授業実践を実施しても問題がないと判断した。

授業実践では，問題理解の場面における教師の役割について検討するために，５クラスの中から１クラスずつを抽出し，授業の核となる問題の提示方法の異なる２つの授業を実施した。一つは，問題（命題）を教師から提示し，証明の必要性を教師が説明する授業（授業Ａ）であり，もう一つの授業は，複数の図をかくことを通して問題（命題）を生徒自身が見いだす授業（授業Ｂ）であった。

授業後のアンケート結果を分析した結果，まず，授業内容の理解に関する質問項目に対しては，肯定的な解答を示した生徒の割合が両授業とも７割から９割程度と概ね良好であり，回答傾向に統計的な有意差は認められなかった（例えば，表１）。

表１．質問項目「授業内容は，理解できましたか」に対する回答結果

	授業Ａ	授業Ｂ
理解できた	38.9％ (14)	44.1％ (15)
どちらかといえば理解できた	50.0％ (18)	38.2％ (13)
どちらかといえば理解できなかった	5.6％ (2)	17.6％ (6)
理解できなかった	5.6％ (2)	0.0％ (0)
計	100.0％ (36)	100.0％ (34)

（χ^2＝4.788，df＝3）

しかしながら，その他の質問項目については，例えば「証明について興味を持ちましたか」（表２）や，授業で考えた問題（命題）について「三角形の合同を利用して確かめることは必要であると思いましたか」という質問項目（表３）に対しては，回答傾向に５％水準で有意な差が認められた。

表２．質問項目「証明について興味を持ちましたか」に対する回答結果

	授業A	授業B
興味をもった	22.2% (8)	15.6% (5)
どちらかといえば興味をもった	27.8% (10)	56.3% (18)
どちらかといえば興味をもてなかった	27.8% (10)	25.0% (8)
興味をもてなかった	22.2% (8)	3.1% (1)
計	100.0% (36)	100.0% (32)

（χ^2＝8.439，df＝3）

表３．質問項目「授業で考えた問題は，三角形の合同を利用して確かめる必要があると思いましたか」に対する回答結果

	授業A	授業B
必要だと思った	36.1% (13)	70.6% (24)
どちらかといえば必要だと思った	50.0% (18)	26.5% (9)
どちらかといえば必要だと思わなかった	5.6% (2)	2.9% (1)
必要だと思わなかった	8.3% (3)	0.0% (0)
計	100.0% (36)	100.0% (34)

（χ^2＝9.554，df＝3）

これらの差は，本授業実践における問題の提示方法の違いによって生じたものと考えられ，「図形の性質の証明」の導入においては，生徒が問題を問題として認識できるようにするための（特に，証明の対象が全称性の保証であることを理解できるようにするための）教師の役割として，教師が問題やその解決の必要性を強調して説明することの効果は限定的であり，生徒自身が具体的な作業を通して問題（命題）を見いだしたり，具体的な作業の限界を認識したりすることが重要であることが示唆された。しかしながら，これらの効果は主に情意的な側面でしか確認できておらず，さらなる検証が必要であると考える。

②高等学校数学Ⅰ「正弦定理」の教授・学習過程に関する知見

前項で示唆された結果について，特に，生徒自身が具体的な作業を通して問題（命題）を見いだしたり，具体的な作業の限界を認識したりすることの情意的な側面に対する影響や認知的な側面に対する影響を調べるために，高等学校数学科を対象とした同様の授業実践を行うことにした。具体的には，岩田・服部（2011）で報告した正弦定理の証明の授業過程[4)]をもとに，授業の実施前と実施後で，数学の授業や学習方法に対する見方がどのように変容したかを，質問紙調査を通して検証することにした。

事前調査の結果から，対象クラスの傾向としては，表４のように，公式やきまりが成り立つ理由を考えることの必要性や重要性を認識している生徒は多いものの，表５のように，自ら考えることの楽しさや意義を感じていない生徒が多いことも分かった。

表４．質問項目「数学では，公式やきまりが，なぜそのような式やきまりになるのかを理解することも大切だ」に対する回答結果

	事前調査
当てはまる	65.8% (25)
どちらかといえば当てはまる	28.9% (11)
どちらかといえば当てはまらない	5.3% (2)
当てはまらない	0.0% (0)
計	100.0% (38)

表５．質問項目「数学の授業で，公式やきまりを習うとき，なぜそうなるかは自分たちで考えたい」に対する回答結果

	事前調査
当てはまる	15.8% (6)
どちらかといえば当てはまる	23.7% (9)
どちらかといえば当てはまらない	57.9% (22)
当てはまらない	2.6% (1)
計	100.0% (38)

このクラスを対象に，具体的な作業を通して命題（正弦定理の一部）を見いだし，一般化することで正弦定理を導く授業を２時間かけて実施したところ，授業後の質問紙調査においては，表６のように，「数学の授業で，公式やきまりを習うとき，なぜそうなるかは自分たちで考えたい」という質問項目に対する肯定的な回答を示す生徒の割合が 39.5%から 86.8%に増え，回答傾向に１%水準で有意な差が認められた。

表６．質問項目「数学の授業で，公式やきまりを習うとき，なぜそうなるかは自分たちで考えたい」に対する回答結果の比較

	事前調査	事後調査
当てはまる	15.8% (6)	47.4% (18)
どちらかといえば当てはまる	23.7% (9)	39.5% (15)
どちらかといえば当てはまらない	57.9% (22)	7.9% (3)
当てはまらない	2.6% (1)	5.3% (2)
計	100.0% (38)	100.0% (38)

（χ^2＝22.273，df＝3）

このように，問題提示や問題理解の場面において，生徒自身が具体的な作業を通して問題（命題）を見いだしたり，具体的な作業の限界を認識したりすることは，（その後の解

決の成否にも依存するが）数学の授業や学習方法に対する見方の変容にも寄与することが分かった。

（4）研究の総括と今後の課題

本研究では，学力調査の問題や結果を分析することを通して，我が国数学教育における学力像と，それら学力に関する生徒の現状を分析した。また，それらの結果を踏まえ，主として中学校第２学年「図形の性質の証明」および高等学校数学Ⅰ「正弦定理」の導入に焦点を当て，中等学校数学科の問題解決指導の具体を明らかにするとともに，授業の核となる問題や問題理解の場面における教師の役割について検討した。その結果，生徒が問題を問題として認識できるようにするための（特に，証明の対象が全称性の保証であることを理解できるようにするための）教師の役割として，教師が問題やその解決の必要性を強調して説明することの効果は限定的であり，生徒自身が具体的な作業を通して問題（命題）を見いだしたり，具体的な作業の限界を認識したりすることが有効であることが示唆された。また，そのような活動は，数学の授業や学習方法に対する見方の変容にも寄与する可能性があることが分かった。

今後は，中学校や高等学校におけるより多くの学習内容に対する創造的・問題解決的な数学の授業の具体を明らかにするとともに，特に，本研究で検証することのできなかった関数の導入や関数の活用の授業場面における授業の核となる問題や問題理解の場面における教師の役割についてより詳細に検討していく必要があると考えている。

注および引用・参考文献

1）室岡和彦，中学・高校数学の改善に向けて－調査結果等から学ぶもの－．日本数学教育学会誌『数学教育』，第 88 巻，7 号，2006，pp.16-22.
2）http://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html
3）文部科学省，『中学校学習指導要領解説 数学編』，平成 20 年 9 月，教育出版，p.84.
4）岩田耕司，服部裕一郎，高等学校における Dörfler の一般化モデルに基づく教材開発－数学Ⅰ「正弦定理」の授業実践を通して－，『福岡教育大学紀要』，第 60 号，第 4 分冊，2011，pp.225-238.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

①茅野公穂，<u>岩田耕司</u>，課題探究として証明することのカリキュラム開発－中学校数学科第１学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想－，日本数学教育学会『第 1 回春期研究大会論文集』，査読無，2013，pp.9-16.
②<u>岩田耕司</u>，出題の趣旨にみる全国学力・学習状況調査の出題の意図と今後の課題－主として「活用」に関する問題に焦点を当てて－，日本数学教育学会誌『数学教育』，査読有，第 94 巻，第 9 号，2012，pp.34-37.
③<u>岩田耕司</u>，服部裕一郎，高等学校における Dörfler の一般化モデルに基づく教材開発－数学Ⅰ「正弦定理」の授業実践を通して－，『福岡教育大学紀要』，査読無，第 60 号，第 4 分冊，2011，pp.225-238.

〔学会発表〕（計　１件）

①茅野公穂，<u>岩田耕司</u>，課題探究として証明することのカリキュラム開発－中学校数学科第１学年の領域「数と式」及び「図形」における学習の構想－，日本数学教育学会第１回春期研究大会，2013 年 6 月 30 日，筑波大学東京キャンパス.

６．研究組織

(1)研究代表者

岩田　耕司（IWATA，Koji）
福岡教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：９０４３７５４１

(2)研究協力者

服部　裕一郎（HATTORI，Yuichiro）
広島大学附属福山中・高等学校・教諭