

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月31日現在

機関番号：12201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2011

課題番号：22730700

研究課題名（和文） 中学校数学の証明問題で中学生が「未完成な証明」を生み出す認知的・情緒的要因の解明

研究課題名（英文） Investigation of cognitive and affective factors that lead students to produce “incomplete proof” at junior high school level

研究代表者

牧野 智彦 (MAKINO TOMOHIKO)

宇都宮大学・教育学部・准教授

研究者番号：10450157

研究成果の概要（和文）：本研究では、中学生の「未完成な証明」の生成過程の推論に着目し、それを生み出す認知的要因と情緒的要因を探っている。中学生による「未完成な証明」を類型化し、各タイプをもたらす認知的要因と情緒的要因を同定するとともに、その背後の思考を推察した。また、証明を成功的に構成できる中学生の証明過程に焦点を当てて、その過程での数学的認知の特質を明らかにし、それを基に「未完成な証明」をもたらす認知的要因を示唆した。

研究成果の概要（英文）：This study aims to explore cognitive and affective factors that lead to “incomplete proof”, focusing on students’ reasoning in the process that they produce it. This study divided into some types of “incomplete proof” produced by students, identified cognitive and affective factors that lead to each type and inferred students’ thinking hidden behind each factor of incomplete proof. Focusing on the proving process by students who can successfully construct geometrical proof, this study clarifies the characteristics of mathematical cognition in their proving process and suggests cognitive factors lead to incomplete proof based on them.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：教育学、教科教育学

キーワード：各教科の教育（算数・数学）

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) 社会的背景と「未完成な証明」の着目

学校数学で証明を学習することは、数学を創造し活用するという「数学的観点」と、物事的前提や根拠を明らかにする、筋道立てて説明する、そして、論理的に考えるなどの「教育的観点」とから重要である。しかし、21世紀に入り、全国規模の各種調査で、証明に関する中学生の学習状況が望ましくないこと

が報告されている〔国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2003, 2006; 文部科学省・国立教育政策研究所, 2008, 2009〕。

各調査では、正答率は約40%程度で、約30%の生徒は無解答という状況である。この状況は古くから研究者だけでなく教師にも共通認識されている事項であるが、未だに改善の兆しが見えないのが現状である。これは、今なお、中学生の証明活動を促進する教授スト

ラテジーが科学的に確立されていないことを示しているのである。そのため、現在でも、教師は試行錯誤しながら、経験的、直観的な判断に基づいた教育実践を行っているのである。今後の中学校の証明の学習指導の在り方を検討する上で、証明活動を促進する教授ストラテジーの開発は喫緊の課題である。なお、海外でも同様の状況である〔Mariotti, 2006; Heinze et al, 2008〕。

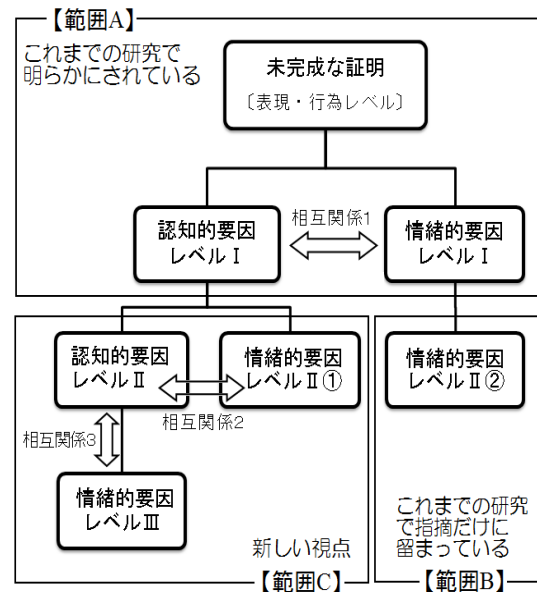
周知の通り、証明学習は完全にできるか、全くできないかではない。実際、途中で止まっている解答、最後まで証明を記述しているが推論に誤りや飛躍がある解答、条件だけ記述している解答等々、中学生の解答は様々で、学習状況の多様さがうかがえる。つまり、このような証明の記述が途中段階にある「未完成な証明」に着目し、その根底にどんな要因があるか、なぜその要因が生成されるのか等々を明らかにし、それらに応じた教授ストラテジーを検討する必要がある。

#### (2) 中学生による成功的な証明活動を妨げる要因—認知的側面と情緒的側面

アメリカの Senk は、幾何の証明の記述力への「概念理解」、「数学的言語・表記法の使用」といった認知的要因の影響を指摘した〔Senk, 1985〕。一方、Moore は、証明を始めることができない要因として、「概念理解」、「数学的言語・表記法の使用」、「論理・証明方法の理解」、そして「数学観・証明観」といった認知的要因を特定した〔Moore, 1994〕。最近では、イタリアの Furinghetti & Morsellii が、証明問題の成功的解決を妨げる認知的要因として「証明のストラテジーの未習得」を特定し、その背後に「数学的活動に対する信念」、「数学や証明に対する自信の低さ」という情緒的(affective)要因があることを明らかにした〔Furinghetti & Morsellii, 2004, 2009〕。これらの研究の結果から、本研究は未完成な証明を生み出す要因に関して、認知的側面と情緒的側面に着目することとした。

#### (3) 証明を生成する活動の根底にある「推論」とその特質

ドイツの Heinze と Reiss の研究グループは、数学者による証明過程のモデル〔Boero, 1999〕を基に、証明の構成過程に含まれる諸活動を提示するとともに、各活動を伴う推論過程を指摘した〔Heinze et al, 2008, Reiss et al, 2008〕。この研究から、顕在化された生徒の証明のパフォーマンスや、生徒によって表現された証明だけを見るのではなく、それらの背後に隠れている「生徒の推論過程」に着目する必要性を感じた。それは、顕在化されている生徒の活動や表現だけを修正しても、その根底にある思考や推論の質が変化しなければ、根本的な解決にならないと考えるからである。



このような着眼点の下で分析することによって、未完成な証明を生成する際に、中学生は一体どのような推論をしているのか、なぜそのような推論をするのか、または、なぜそのような推論をしてよいと思ったのか等、生徒が証明を生成する際の推論の特質を明らかにすることができ、教授ストラテジーを開発する上での有用な情報を得ることができる。以上(1)から(3)から本研究課題を設定するに至った。

#### (4) 学術的特色・独創的な点

Moore や Furinghetti & Morsellii の研究は、大学生の証明活動を不成功へ導く認知的要因と情緒的要因に着目し、現在までいくつかの要因と各要因間の相互関係について解明した〔範囲A〕。しかし、従来の多くの証明研究の認知的・情緒的要因の分析は、顕在化された情報、例えば、「途中で書くのをやめたのは何がわからなかったのか」や「誤った情報をなぜ書いたのか」の分析に留まっていた。それに対して、本研究では、未完成な証明を生み出した認知的要因(レベルⅠ)の背後にある認知的要因(レベルⅡ)を、生徒の思考過程、推論過程を視点に精査する〔範囲C〕。これは、これまでの国内外の証明研究においても本格的に取り上げられていない本研究の独創的な点といえる。また、認知的要因(レベルⅡ)の解明を「核」に、それに付随する【範囲C】の2種類の情緒的要因を特定し、認知的要因との相互関係を同定する。そして、相互の影響力の強弱を観点に、「未完成な証明」を生み出す各要因間の関係を構造化する。この点にも本研究の独創性がある。

一方、本研究では、未完成な証明を生み出す情緒的要因の背後にある情緒的要因、いわばメタ情緒的要因についても精査する〔範囲C〕。

困 B】). これは, Furinghetti & Morselli など, これまでの研究では指摘されているが, 現段階では指摘に留まっている. この点を本格的に取り上げ, 解明することで, 国内外の証明研究の前進に大いに貢献できる.

最後に, 本研究を通して, 「未完成な証明」を生み出す認知的要因と情緒的要因と, 各要因間の相互関係が詳細に解明される. これによって, 「未完成な証明」を生み出す要因を軽減あるいは解消し「受容可能な証明」へ促す治療的教授ストラテジーとともに, 「未完成な証明」を未然に防ぐ予防的教授ストラテジーの開発に必要な情報を得ることができる. そして, 現在の我が国の証明に関する学習状況を改善へ向けた教育実践への貢献が大いに期待できる.

## 2. 研究の目的

中学生による「未完成な証明」の生成過程の推論に着目し, 「未完成な証明」を生み出す認知的要因と情緒的要因を解明する.

## 3. 研究の方法

### (1) 認知的・情緒的要因の分析枠組みの作成

記述的研究からアプローチし証明活動を妨げる認知的要因を, 一方規範的研究からアプローチして, 数学者による証明過程のモデルを基に証明過程の障害となりそうな活動や推論を整理する.

### (2) レベルⅠの認知的要因と情緒的要因及び相互関係Ⅰの解明

筆記調査を実施し, 「未完成な証明」を生成している中学生を抽出する. そして, 当該被験者に対して発話思考法や補足のためのインタビュー調査を実施し, 表現・行為レベルでの認知的要因(レベルⅠ)と情緒的要因(レベルⅠ)を探り, それらの相互関係(相互関係Ⅰ)について精査する.

### (3) レベルⅡの認知的要因と情緒的要因及び相互関係Ⅱの解明

レベルⅡの認知的要因を探るための発話思考法や補足のためのインタビュー調査を通して, 「未完成な証明」を生成した生徒の推論過程を分析し, 思考・推論レベルでの認知的要因(レベルⅡ)と情緒的要因(レベルⅡ①)を探り, それらの相互関係(相互関係Ⅱ)を精査する.

また, 発話思考法や補足のためのインタビュー調査を通して, 情緒的要因(レベルⅠ)をもたらず情緒的要因(レベルⅡ②)を探る.

なお, 認知的要因に関しては, 筆記調査の証明問題を成功的に解決した生徒の推論過程と比較して, 「未完成な証明」を生成した生徒の推論過程の特質を明らかにする.

### (4) レベルⅢの情緒的要因及び相互関係Ⅲの解明

発話思考法や補足のためのインタビュー調査を通して, 認知的要因(レベルⅡ)をもたらず情緒的要因(レベルⅢ)を探り, 認知的要因(レベルⅡ)との相互関係(相互関係Ⅲ)を精査する.

## 4. 研究成果

(1) Furinghetti & Morselli(2004, 2007, 2009), Heinze et al(2008)の先行研究を整理し, 認知的・情緒的要因と, それらの相互関係を分析する視点を得た.

また, Schoenfeld(1992)による「数学的認知を捉える枠組み」を調べ, 「未完成な証明」を生成する中学生の要因の認知的側面を捉える視点が明らかになった.

- 基になる知識
- 問題解決ストラテジー
- モニタリングとコントロール

要因の認知的側面を漠然と捉えて分析するのではなく, 各観点から分析する必要があることがわかった.

(2) 表現・行為レベルの認知的・情緒的要因を探るために, 中学生によって書かれた証明をもとに, 「未完成な証明」をいくつかのタイプに類型化した. 例えば, 「未完成な証明」には次のようなものである.

- タイプⅠ: 証明を全く記述していないが, 所与の図に印を記入している.
- タイプⅡ: 証明が途中で止まっている.
- タイプⅢ: 結論まで至っているが誤りや飛躍がある.
- タイプⅣ: 当該証明で使用できない性質を使っている.

そして, Heinze et al(2008)による証明の構成過程に関する理論枠組みとインタビュー調査によって得た発話データとをもとに, 各タイプを生み出す認知的要因を分析した.

その結果, 証明の構成過程において前提と結論を繋げる「架橋過程」が重要な鍵の一つであることが分かった. しかも, 架橋過程には, 下位の「調整(coordination)」という行為が存在しており, 「調整」行為の遂行の困難が「未完成な証明」を生み出す要因となっていることがわかった. 例えば, 当該証明に役立ちそうな性質を抽出したり, それらの性質から演繹に適する性質を選択したりすることである.

また, 「未完成な証明」の認知的要因には, 同じタイプの「未完成な証明」でも, 要因が異なるものがあることがわかった.

例えば、上記のタイプⅡ（証明が途中で止まっている）の解答でも、次のような異なる要因がある。

- 証明で使えそうな性質を抽出できない。
- 結論から推論することができない。

一方で、異なるタイプの「未完成的な証明」でも、要因が重なり合うものもある。例えば、上記のタイプⅠとタイプⅡでも「証明で使えそうな性質を抽出できない」という同じ要因がオーバーラップしていた。

これらの成果によって、「未完成的な証明」をもたらす認知的要因を探るポイントを絞ることができた。また、表現・行為といった表層の背後に隠れている本質的要因には、表現・行為レベルでの類型化とは異なる構造（メカニズム）がある可能性を示唆している。

(3) 「未完成的な証明」を生成する際の推論の特質を明らかにするために、証明問題を成功的に解決した生徒の推論過程と比較・検討することを計画した。そこで、証明問題を成功的に解決した生徒に対するインタビュー調査を実施し、成功的証明者の証明過程における思考・推論の特徴を分析した。

その結果、成功的証明者は架橋過程を成功的に遂行するために、次のことを行っていることがわかった。

- 結論から後向きに推論する。
- 証明の誤りや無駄な経路を修正する。

これによって、「未完成的な証明」を生成した生徒の推論過程の特質を分析する視点を得ることができた。

また、「不安」という情緒が、証明の方針の選択決定に影響を与えている様子を捉えることができ、証明過程における情緒の影響に関する情報を得ることができた。

(4) 「基にある知識」の観点から、「未完成的な証明」を生成する生徒でも、平行線の性質、三角形の合同条件、合同な図形の性質といった基本的な数学的知識を持っていた。

しかし、「未完成的な証明」を生成する生徒は、数学的概念の「性質」と「条件」の両方を調和的に把握できないことがわかった。例えば、2直線が平行であることから、2本の平行線に1本の直線が交わってできる錯角や同位角が等しいという、平行線の「性質」を導くことはできる。それにもかかわらず、2本の直線が平行になるための「条件」、すなわち、「錯角が等しい」、「同位角が等しい」を見出せないのである。このように生徒が持つ「知識」の質が、証明のストラテジー、例えば「後向きに推論する」を困難にする要因

となっている可能性が高いことがわかった。

(5) 「問題解決ストラテジー」の観点から、「未完成的な証明」を生成した中学生は、証明問題に成功的に解決した中学生と違って、前提から前向きに推論するだけで、結論から後向きに推論することに困難を持っていることがわかった。

また、ある問題に対して正しい証明を構成した生徒は、結論から後向きに推論を遂行していた。ところが、その生徒が別の問題に対して後向きに推論を遂行したにも関わらず「未完成的な証明」を生成した。このことから、証明の構成には、前向き推論と後向き推論との両方向から推論を遂行できるだけでは不十分であり、両方向の推論を繋げる「第三の推論」が不可欠であることがわかった。証明が「完成」するか「未完成」で留まるかは、この「第三の推論」が鍵を握っている可能性が高い。

(6) モニタリングとコントロールの観点から、「未完成的な証明」を生成する生徒は、「架橋過程」で前提と結論を繋ぐ「中間の条件」など、証明に必要な性質を演繹にふさわしいかどうかを評価して、選択しないのである。しかも、証明に必要な性質を選択した際に、それで本当によいかを点検することもしない。こうしたモニタリングやコントロールの観点が未習得であることも、「未完成的な証明」をもたらす要因となっている可能性が高い。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

- ① 牧野智彦, 中学校数学での証明の「架橋過程」における生徒の認知的困難, 日本科学教育学会研究会研究報告, 査読無, 26巻, Vol. 5, 2012, 25-30.
- ② 牧野智彦, 中学生の証明の構成過程における推論の特質—成功的証明者による「架橋過程」に焦点を当てて—, 第43回日本科学教育学会論文発表会論文集, 査読有, 2巻, 2010, 699-704.
- ③ Chino, K., Fujita, T., Komatsu, K., Makino, T., Miyakawa, T., Miyazaki, M., Mizutani, N., Nakagawa, H., Otsuka, S. & Tsujiyama, Y., An Assessment Framework for Students' Abilities/Competencies in Proving, Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, 査読有, Vol.2, 2010, 416-423.
- ④ 牧野智彦, 証明の本質の理解を促す指導の開発研究, 第34回日本科学教育学会年会論文集, 査読無, 2010, 85-86.

〔学会発表〕(計4件)

- ① 牧野智彦, 中学校数学での証明の「架橋過程」における生徒の認知的困難, 平成23年度第5回日本科学教育学会研究会, 2012年4月7日, 筑波大学.
- ② 牧野智彦, 中学生の証明の構成過程における推論の特質－成功的証明者による「架橋過程」に焦点を当てて－, 第43回日本数学教育学会論文発表会, 2010年11月14日, 宮崎大学.
- ③ 牧野智彦, 証明の本質の理解を促す指導の開発研究, 第34回日本科学教育学会年会, 2010年9月11日, 広島大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

牧野 智彦 (MAKINO TOMOHIKO)  
宇都宮大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 10450157

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし