

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月27日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740004

研究課題名（和文） 既約シンプレクティック多様体の構造の明示的研究

研究課題名（英文） Explicit study of structures of irreducible symplectic manifolds

研究代表者

永井 保成（NAGAI YASUNARI）

早稲田大学・理工学術院・准教授

研究者番号：50572525

研究成果の概要（和文）：

コンパクト既約シンプレクティックケーラー多様体の例として O'Grady による散在的な 2 つの例が知られている。これらは K3 曲面およびアーベル曲面の上の階数 2 の不安定接続層のモジュライ空間として構成されるが、本研究ではこれらモジュライ空間上の局所自由でない接続層の軌跡を調べることで、O'Grady の例における双有理幾何的な構造を明らかにした。その際にはモジュライ問題と関連する不変式環を、古典不変式論を用いて計算機代数などの助けによって明示的に計算する方法について考察した。

研究成果の概要（英文）：

O'Grady constructed two sporadic examples of compact irreducible symplectic Kähler manifolds using moduli spaces of rank 2 semi-stable coherent sheaves on a K3 surface or an Abelian surface. I studied the locus of non-locally free sheaves in these moduli spaces and clarified some birational-geometric structures on the O'Grady's examples. In the course of study, I investigated a method to calculate explicitly some invariant rings associated to the moduli problem using classical invariant theory, with the aid of computational algebra.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数多様体・双有理写像・正則シンプレクティック幾何・計算機代数の応用

### 1. 研究開始当初の背景

コンパクトな既約シンプレクティック多様体は、標準因子が自明となるコンパクトケーラー多様体のなかでの基本的な構成要素であり、代数幾何・複素幾何のみならず、数

物理をはじめとする関連分野を含めて広く興味をもたれ研究が行われてきた対象である。このコンパクト既約シンプレクティック多様体の一般的な研究においてしばしば問題になるのが、その具体例の少なさである。研究開始時点では（報告書執筆時点でも）コ

コンパクトシンプレクティック多様体の具体的な例については  $K3$  曲面およびアーベル曲面の点のヒルベルトスキームから作られる系列（ここではヒルベルト型・クンマー型と呼ぶことにする）の他には、O'Grady による 2 つの散在的な例が知られているのみであった。これら O'Grady の例はヒルベルト型・クンマー型の例に比べるとその具体的な研究が未発展であり、たとえば、高次のベッチ数なども知られていなかった。このような状況のもとでは、既に知られている例をよく調べることと新しい例を構成することの 2 つの問題が自然に考えるべき主要なテーマである。

## 2. 研究の目的

そこで、本研究では既存の例についてのより詳しい研究という観点からは O'Grady の例に着目し、その具体的な幾何学的性質をある程度明らかにしようと考えた。特に、ヒルベルト型・クンマー型とは異なった振舞いについて明らかにするために、O'Grady の例の構成に現れる  $K3$  曲面および Abel 曲面の上の階数 2 の半安定接続層のモジュライ空間のなかで、局所自由にならない層の軌跡を調べ、O'Grady の例における双有理幾何や可積分系についての帰結を得ようとした。

また、既約シンプレクティック多様体の退化についても研究を企図した。研究代表者は過去に既約シンプレクティック多様体の良い退化というものを定義し、その性質について調べたことがあったが、良い退化の存在といった強い仮定を置かずに既約シンプレクティック多様体の退化を研究することを目指した。その動機として、既約シンプレクティック多様体の退化についての情報が、既約シンプレクティック多様体の例についての可能性に制限を与えたり、あるいは、新しい例の構成に使用できたりする可能性があったからである。

## 3. 研究の方法

(O'Grady の例について)

局所自由にならない層の軌跡は、便利なコホモロジー的な記述をもつ Brill-Noether 軌跡等の場合とは異なり、そこに属する層の構造そのものと幾何学的不変式論に基づくモジュライ空間の構成、あるいは変形理論など、より幾何学的方法で研究する必要がある。本研究では、これらの問題を、ある種の不変式環の計算に帰着し、これを古典不変式論や計算機代数の知識によって明示的に計算しようとした。

(既約シンプレクティック多様体の退化について)

過去の研究代表者の研究においては、既述の通り既約シンプレクティック多様体の良い退化というものを定義してこれを調べたが、高次元の既約シンプレクティック多様体の良い退化の例を構成することは難しく、研究代表者は報告書執筆時点でもその例をひとつしか知らない。これは、高次元多様体の幾何学においては不可避免的に特異点が現れるという一般的な現象と関連している。そのような状況に置いては、既約シンプレクティック多様体の退化において許容すべき特異点がどのようなものであるかということと、そのような特異点がある状況で何を言いかということの問題が考えられる。本研究では前者については、 $K3$  曲面の退化族から定まるヒルベルト型の既約シンプレクティック多様体の退化に現れる特異点や、組み合わせ論的、位相幾何的な情報を具体的に計算してより一般の場合についての手がかりを得ることをめざし、また、後者については、このような例の計算に立脚して、どのようにすれば半安定退化の場合に可能であった Hodge 理論的な議論などを用いることができるかを探求しようとした。

(研究者との交流)

代数的シンプレクティック多様体や、代数多様体上の半安定層のモジュライ空間と言った問題は、多くの研究者が興味を持っている分野であり、これら研究者との意見交換や情報収集といった交流活動が研究の生産性を上げると考えられる（実際、研究代表者の O'Grady の例に関する研究の方法論は、研究代表者がドイツ・マインツ大学に滞在していた時に当地の研究者との議論の中から構想を得たものである）。そこで、関連する話題に関する内外の研究集会への出席や、海外の研究者の招聘を積極的に行なおうとした。

## 4. 研究成果

(O'Grady の例について)

一般に、モジュライ問題に現れる不変式環を明示的に計算することは、とても都合の良い場合を除いて事実上不可能であるが、O'Grady の 2 つの例の場合には Gröbner 基底を用いた計算機代数に基づくコンピュータを援用した計算によって、必要な不変式環の計算をほぼすべて行なうことができ、特に、6 次元の例の場合については、Donaldson-Uhlenbeck コンパクト化上の相対的な双有理幾何を完全に決定することに成

功した。これらの結果については2篇の論文を執筆し、そのうちの1篇は査読付きの定期刊行論文誌に掲載が決定し、もう1篇も査読付き論文雑誌に投稿中である。

また、この研究の過程では、古典不変式論および計算機を用いて不変式環を明示的に求める際に計算量を減らすための工夫が必要であったため、一般に古典不変式環を計算機によって計算する際の方法論についても考察することとなった。そこで得られた知見に関しては、2012年度の代数学シンポジウムにおいて講演を行い、その概要を報告集に掲載した。古典不変式論の現代的な観点からの研究は、本研究に置ける  $O'$  Grady の例のみにとどまらず、幅広い代数幾何の問題に応用できる可能性を持っており、より深く研究を続けて行くことが望ましいと考えている。

(既約シンプレクティック多様体の退化について)

既約シンプレクティック多様体の退化に関しては、K3曲面の極小な半安定退化族、すなわち、いわゆる Kulikov モデルを考え、その  $n$  次の対称積について考察した。この族の一般ファイバーのクレパント解消がヒルベルト型の既約シンプレクティック多様体である。考える退化族の全空間は、解析的にトーリックな特異点をもつ多様体の対称群による商となる。 $n$  が2の場合は研究代表者の過去の研究によって、この退化の得意展開賞を取ることによって良い退化(極小な半安定退化)を得ることができていることがわかっていたが、その特異ファイバーの位相幾何的な不変量の計算を行なった。また、一般の  $n$  に対しては、対称群の作用からさだまる(一般化された)オービフォールドコホモロジーを計算に取りかかったが、これについては部分的な結果しか得られなかった。具体例を離れた一般の退化についてはその基礎となりうる様々な既存の結果についての文献調査等を行なったが、顕著な結論を得るには至っていない。これらいくつかの個別的な問題については今後も研究を継続して行く考えである。

(研究者との交流)

自らの研究成果について複数の内外の研究集会やセミナーにおいて発表を行ない、近接分野の研究者と意見交換を濃なった。また、海外からの研究者の招聘も行ない、代数曲線上の安定ベクトル束についての講演を行なってもらったほか、代数的シンプレクティック多様体の例である代数曲線上のヒッグス束のモジュライ空間にまつわる諸問題に関して情報交換を行なった。このようにして得られた知見は、将来の研究に積極的に活用して行く考えである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- (1) Nagai, Yasunari, *Non-locally-free locus of  $O'$  Grady's ten dimensional example*, manuscripta mathematica (2012) DOI 10.1007/s00229-012-0595-5 (査読有・電子版に掲載済み、紙媒体にも掲載予定)

[学会発表] (計4件)

- (1) 永井 保成, Computing classical invariant rings with application to moduli spaces, 第57回代数学シンポジウム, 2012.8.20-23
- (2) Yasunari Nagai, Abelian fibrations and Lagrangian fibrations, KIAS Winter School on Algebraic Geometry, 韓国 Duksan, 2012.1.30-2.2
- (3) Yasunari Nagai, An explicit study of  $O'$  Grady's examples, 都の西北 代数幾何学シンポジウム, 早稲田大学, 2010.11.10-2010.11.13
- (4) Yasunari Nagai, An explicit study of non-locally free locus of  $O'$  Grady's example, Miniworkshop on holomorphic symplectic geometry, 韓国・高等科学院 (KIAS), 2010.09.29-30

[その他]

(プレプリント)

- (1) Nagai, Yasunari, *Birational geometry of  $O'$  Grady's six dimensional example over the Donaldson-Uhlenbeck compactification*, preprint (2010) 投稿中

(講演会等)

- (1) 永井 保成, Birational Geometry of  $O'$  Grady's six dimensional example over the Donaldson-Uhlenbeck compactification, 東京大学数理科学研究科 代数幾何学セミナー, 2011.07.04

- (2) 永井 保成, Birational geometry of  $O^*$  Grady's six dimensional example over the Donaldson-Uhlenbeck compactification, 京都大学 代数幾何学セミナー, 2011. 1. 14
- (3) 永井 保成, Non-locally free locus of  $O^*$  Grady's 10 dimensional example, 首都大学東京・複素幾何セミナー, 2010. 1. 13.
- (4) 永井 保成, Non-locally free locus of  $O^*$  Grady's 10 dimensional example, 名古屋大学・代数幾何セミナー, 2009. 12. 21.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

永井 保成 (NAGAI YASUNARI)  
早稲田大学・理工学術院・准教授  
研究者番号：50572525