様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　4 月　3 日現在

機関番号：１３５０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2010～2011
課題番号：２２７４０００７
研究課題名（和文）　Hessian K3 曲面を利用した 3 次曲面のモジュライの研究

研究課題名（英文）　The moduli space of cubic surfaces via Hessian K3 surfaces

研究代表者
小池　健二（KOIKE　KENJI）
山梨大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：２０３６２０５６

研究成果の概要（和文）：Sylvester の標準形で表せない Hessian K3 曲面の 3 次元族を調べた。この族は toric 超曲面としても得られ、Dolgachev の意味で、射影直線の３つの直積(P^1)^3 の(2,2,2)次超曲面の Mirror 族となっている。周期積分が Lauricella の F_C を満たすことを示し、テータ関数を利用して周期写像の逆写像を構成した。周期領域は Siegel 上半空間であり、対応する modular 群は Fricke 対合による¥Gamma_0(2)の拡大となっている。

研究成果の概要（英文）：We studied Hessian K3 surfaces of cubic surfaces of non-Sylvester types. They are obtained also as toric hypersurfaces, and considered as a mirror family of (2,2,2)-hypersurfaces of (P^1)^3. Their period integrals satisfy the Lauricella's hypergeometeric differential equations F_C, and the period domain is the Siegel upper half space of degree two.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	300,000	90,000	390,000
２０１１年度	300,000	90,000	390,000
年度			
年度			
年度			
総　計	600,000	180,000	780,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：３次曲面・K3 曲面・テータ関数

１．研究開始当初の背景
保型関数の幾何学的解釈の一つとして、保型関数を周期写像の逆写像と考える事が出来る。即ち「代数多様体の方程式を分類する」という代数的なモジュライと、「Hodge 構造を対称領域の算術商により分類する」という超越的なモジュライの対応を与えていると考える事が出来る。（無論、前提として、Torelli 型定理の存在が必要となる。）近年、Allcock, Carlson, Toledo により３次曲面のモジュライ空間が４次元複素超球の算術商により与えられる事が示され、３次曲面のモジュライが集中的に研究された。３次曲面で分岐する３次元射影空間の巡回３重被覆は３次元３次超曲面であり、中間ヤコビ多様体を考える事により周期の理論が構成できる。松本-寺杣は中間ヤコビ多様体と、代数曲線の Prym 多様体のの同型を与え、Picard の保型関数を拡張する形で４変数保型関数をテータ関数を用いて構成した。同様の研究は、Dolgachev, van Geemen,

金銅, Freitag 等によっても並行して行われ、Borcherds の無限積を利用した構成も知られている。
４変数３次形の$SL_4(\mathbb{C})$-不変式環は

$$C[I_8, I_{16}, I_{24}, I_{32}, I_{40}, I_{100}]$$

で与えられることが知られている。ここで, I_n は n 次の不変式であり、$I_8, \ldots, I_{40}$ は代数的独立、I_{100}^2 は $I_8, \ldots, I_{40}$ の多項式となることが知られている。
(B. Hunt, The Geometry of some special Arithmetic Quotients, Springer LNM 1637 (1996)). 従って３次曲面のモジュライ空間 M_I は重み付き射影空間

$$\mathrm{Proj}\ C[I_8, I_{16}, I_{24}, I_{32}, I_{40}]$$

即ち $P(1,2,3,4,5)_I$ で与えられる。一般の３次曲面は Sylvester の標準形と呼ばれる４次元射影空間における完全交叉 S_l:

$$X_0 + \ldots + X_4 = 0,$$
$$l_0 X_0^3 + \ldots + l_4 X_4^3 = 0$$

として表される。s_i を $l_0, \ldots, l_4$ の i 次基本対称式とすると、これ等は S_l の不変式を与える:

$$I_8 = s_4^2 - 4 s_3 s_5,$$
$$I_{16} = s_5^3 s_1,$$
$$I_{24} = s_5^4 s_4,$$
$$I_{32} = s_5^6 s_2,$$
$$I_{40} = s_5^8$$

この対応は双有理写像

$$P(1,2,3,4,5)_l \longrightarrow P(1,2,3,4,5)_I$$

を与え、base locus は $s_5 = s_4 = 0$ である。３次曲面 X の Hessian 曲面 H(X)は、symmetroid として知られる４次曲面であり、非特異極小モデルは K3 曲面であるが、S_l の Hessian K3 曲面 H_l は

$$X_0 + \ldots + X_4 = 0,$$
$$1/(l_0 X_0) + \ldots + 1/(l_4 X_4) = 0$$

で与えられる。H_l の非特異極小モデルの Picard lattice は $U+U(2)+A_2(2)$ で与えられる。

２．研究の目的
van Geemen, Dardanelli は３次曲面の Hessian を調べる事により、３次曲面のモジュライを考察している。彼等の結果を発展させ、IV 型領域を利用して、３次曲面のモジュライに付随した保型関数を構成する試みは未だ成されておらず、これを本研究にて遂行しようと考えた。
Sylvester の標準形で表せない３次曲面は３次元の族を成し、その様な３次曲面はモジュライ空 M_I において $I_{40} = 0$ によって定まる部分代数多様体を成す。この様な３次曲面 $S_{ns1}(a)$ は一般に

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - X_0^2 (a_0 X_0 + 3 a_1 X_1 + 3 a_2 X_2 + 3 a_3 X_3) = 0$$

と表せる。a_1^3, a_2^3, a_3^3 の i 次基本対称式を r_i とおけば、モジュライ空間 $P(1,2,3,4,5)_I$ における点$[S_{ns1}(a)]$は

$$[-4r_1+a_0^2 : r_2 : 2r_3 : r_1 r_3 : 0]$$

により与えられる。$S_{ns1}(a)$の Hessian 曲面 $H_{ns1}(a)$は

$$X_0 X_1 X_2 X_3 (a_1(X_1 / X_0) + a_2 (X_2 / X_0) + a_3 (X_3 / X_0) + a_0 + a_1^2 (X_0 / X_1) + a_2^2 (X_0 / X_2) + a_3^2 (X_0 / X_3)) = 0$$

により与えられ、その超越格子は一般の $H_{ns1}(a)$に対し

$$T_{ns1} = U+U(2)+ \langle -4 \rangle$$

となる。 affine 座標

$$[X_0:X_1:X_2:X_3]=[1:x/a_1:y/a_2:z/a_3]$$

を用いると $H_{ns1}(a)$の方程式は

$$xyz(x + y + z + a_0 + a_1^3 (1/x) + a_2^3 (1/y) + a_3^3 ()1/z) =0$$

となる。Hessian 曲面 H_{ns1} はトーリック超曲面としも得られる。実３次元空間の８点

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1),$$
$$(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)$$

を頂点とする８面体を Δ とすると、これは単体的かつ reflexive な多面体であり, 双対多面体 Δ^* は

$$(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1),$$
$$(-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1),$$
$$(-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$$

を頂点とする立方体である。Δ を単体的凸錐

とみなすことにより、トーリック多様体X(Δ)を得るが、これは３つの射影直線の積である。X(Δ)の反標準因子の線形系は、bi-degree が(2,2,2)の超曲面であり、一般にＫ３曲面である。 同様にして双対の族を X(Δ*)の超曲面として得るが、これは H_{ns1}と同じ族である。 この二つの族の超越格子と Picard 格子を比較することにより、これ等は mirror 族になっていることがわかる。この観点からも、HessianK3 曲面は興味深い対象である。この族に対し、周期写像とモノドロミー群の記述、算術商としてのモジュライ空間の構成、テータ関数によるモジュラー関数を考察しようと考えた。

３．研究の方法

(1) Torelli 型定理と V.V.Nikulin の格子の理論を用いて Hessian K3 曲面の同型類を分類する。

(2) Hessian K3 曲面のモジュライ空間である４次元 IV型領域 D の算術商と、Hermite 上半空間Ｈの算術商の間のモジュラー同型を構成する。

(3) Ｈ上の Hermite テータ関数を利用して保型関数を構成する。

４．研究成果

(1) Sylvester の標準形で表せない３次曲面の Hessian K3 曲面として、K3 曲面の３次元族を得るが、これに関して以下の結果を得た。

①超曲面に対する Poincare 留数を具体的に計算する事により、周期積分が Lauricella の超幾何微分方程式 F_C(1,1/2;1,1,1)を満たすことを示した。

$$
\begin{aligned}
&I(u_1,u_2,u_3)\\
&=\iiint_{|x|=|y|=|z|=\varepsilon}\frac{dx\wedge dy\wedge dz}{f_u}\\
&=\iiint\frac{1}{xyz(x+y+z+1)}\frac{dxdydz}{1+\frac{u_1xy+u_2yz+u_3zx}{xyz(x+y+z+1)}}\\
&=\iiint\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-u_1xy-u_2yz-u_3zx)^n}{(xyz(x+y+z+1))^{n+1}}dxdydz\\
&=\sum_{p,q,r=0}^{\infty}\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}(-u_1)^p(-u_2)^q(-u_3)^r\\
&\qquad\times\iiint\frac{x^{p+r}y^{p+q}z^{q+r}dxdydz}{(xyz(x+y+z+1))^{p+q+r+1}}\\
&=(2\pi i)^3\sum_{p,q,r=0}^{\infty}\frac{(2p+2q+2r)!}{(p!q!r!)^2}(-u_1)^p(-u_2)^q(-u_3)^r\\
&=F_C(1,\frac{1}{2};1,1,1;-2u_1,-2u_2,-2u_3).
\end{aligned}
$$

non-Sylvester 型の Hessian K3 曲面の方程式を affine 方程式

f_u = xyz(x + y + z + 1 + (u_1 /x) + (u_2 /y) + (u_3 /z)) = 0

によって表す時、留数積分は上述のようにして計算される。

また、周期領域は Siegel 上半空間 H_2 と同型であり、モジュラー群は¥Gamma_0(2)を Fricke involution
 (1/¥sqrt{-2})*{{0,-I_2},{2I_2,0}}
で拡大した群¥Gamma_0^*(2)と同型であることを示した。これは次の二つの準同型写像を用いて示される。
一つは

$$
h:\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})\to\mathrm{O}^+_{ns}
$$
$$
\begin{bmatrix}m_1&m_2\\m_2&m_3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-2m_1m_2+2m_3^2&1&-2m_2&-2m_1&4m_3\\m_1&0&1&0&0\\m_2&0&0&1&0\\m_3&0&0&0&1\end{bmatrix}
$$

であり、O_{ns}+は周期領域に作用するモジュラー群、即ち超越格子に対する直交群である。もう一つは

$$
g:\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\to\mathrm{O}^+_{ns}
$$
$$
\begin{bmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{bmatrix}\mapsto\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix}a_1^2&a_2^2&2a_1a_2\\a_3^2&a_4^2&2a_3a_4\\a_1a_3&a_2a_4&a_1a_4+a_2a_3\end{bmatrix}
$$

である。

②¥Gamma_0(2)に対するモジュラー形式の次数付き環の構造は、伊吹山により決定されており、偶数 weight に制限すると、weight が 2,4,4,6 のモジュラー形式で生成され関係式は無い。この環に Fricke involution を作用させることにより、¥Gamma_0^*(2)に関する偶数 weight のモジュラー形式の次数付き環は weight が 2,4,6,8 のモジュラー形式で生成され、従って H_2/¥Gamma_0^*(2)の佐武コンパクト化は重み付き射影空間 P(2,4,6,8)となる事を示した。 これは、伊吹山が構成した Siegel テータ関数による、¥Gamma_0(2)に対するモジュラー形式の次数付き環の基底に対し、テータ関数の２倍公式

$$
\begin{aligned}
\theta_{0000}^2(\tau/2)&=\theta_{0000}^2(\tau)+\theta_{1000}^2(\tau)+\theta_{0100}^2(\tau)+\theta_{1100}^2(\tau)\\
\theta_{0001}^2(\tau/2)&=\theta_{0000}^2(\tau)+\theta_{1000}^2(\tau)-\theta_{0100}^2(\tau)-\theta_{1100}^2(\tau)\\
\theta_{0010}^2(\tau/2)&=\theta_{0000}^2(\tau)-\theta_{1000}^2(\tau)+\theta_{0100}^2(\tau)-\theta_{1100}^2(\tau)\\
\theta_{0011}^2(\tau/2)&=\theta_{0000}^2(\tau)-\theta_{1000}^2(\tau)-\theta_{0100}^2(\tau)+\theta_{1100}^2(\tau)\\
\theta_{0100}^2(\tau/2)&=2(\theta_{0000}\theta_{0100}+\theta_{1000}\theta_{1100})(\tau)\\
\theta_{0110}^2(\tau/2)&=2(\theta_{0000}\theta_{0100}-\theta_{1000}\theta_{1100})(\tau)\\
\theta_{1000}^2(\tau/2)&=2(\theta_{0000}\theta_{1000}+\theta_{0100}\theta_{1100})(\tau)\\
\theta_{1001}^2(\tau/2)&=2(\theta_{0000}\theta_{1000}-\theta_{0100}\theta_{1100})(\tau)\\
\theta_{1100}^2(\tau/2)&=2(\theta_{0000}\theta_{1100}+\theta_{0100}\theta_{1000})(\tau)\\
\theta_{1111}^2(\tau/2)&=2(\theta_{0000}\theta_{1100}-\theta_{0100}\theta_{1000})(\tau)
\end{aligned}
$$

を適用することにより、Fricke involution の作用を具体的に計算することにより実行された。
③超幾何関数の退化を利用して周期写像の境界成分への拡張を調べることにより、H_2/¥Gamma_0^*(2) の佐武コンパクト化と Dardanelli と van Geemen によって構成された、非 Sylvester 型の３次曲面の幾何学的不変式論によるモジュライ空間との間の同型を与えた。境界成分における周期写像は、Appell の F_4 を満たす楕円積分により与えられる。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[rr, "Per"] \arrow[d, "DvG"'] & & \mathbb{D}^{+}_{ns} \arrow[d] \\ \mathbb{P}(1,2,3,4) & & \mathfrak{S}_2/\Gamma_0^*(2)_2 \cong \mathbb{D}^{+}_{ns}/\mathrm{O}^{+}_{ns} \arrow[ll, "\Theta"'] \end{tikzcd}$$

これ等の研究成果は論文にまとめ Journal of Algebra に掲載された。

(2) K3曲面Xの自己同型はH^{2,0}(X)に自明に作用する時、symplecticという。
symplectic involutionは８個の固定点を持ち、商曲面の８個のnodeをblow upして得られる曲面は再びK3曲面になることが知られている。塩田-猪瀬は特異K3曲面 (Picard数が20であるK3曲面) Xに対し、以下の性質を持つsymplectic involutionを構成した。
(性質i)商曲面YはKummer曲面である。
(性質ii)XからYへの商有理写像は、T_X(2)からT_YへのHodge isometry を引き起こす。
ここで、T_XはXのtranscendental latticeを表す。 一般に、この様なsymplectic involution を、K3曲面上の塩田-猪瀬構造と呼ぶ。この定義はMorrisonによる。MorrisonはK3曲面Xが塩田-猪瀬構造を持つ為の必要十分条件は、T_XがT_AとHodge isometricである様なAbel曲面Aが存在する事であるということを証明した。一般の(1,d)-編極Abelian曲面のtranscendental latticeはM_d = U+U+<-2d> であるから、Picard 数が17のK3曲面Xが塩田-猪瀬構造を有するのはNS(X)=E_8+E_8+< 2d> のときである。
しかしながら、 この様なK3曲面の３次元族の具体例はd=1,2の場合しか知られていない。これ等の例においては、K3曲面は楕円曲面として与えられ、2-torsion sectionがsymplectic involutionを与えている。この状況においてはXからYへの有理写像は関数体上の楕円曲線のisogenyとして与えられ、dual isogenyを考える事により、Kummer sandwich theoremの幾何学的実現を得る。

$$X : y^2 = x(x^2 + a(t)x + b(t))$$
$$Y : y^2 = x(x^2 - 2a(t)x + a(t)^2 - 4b(t))$$

$$\phi : X \longrightarrow Y, \quad (x,y) \mapsto \left(\frac{y^2}{x^2}, \frac{y(x^2 - b(t))}{x^2}\right),$$
$$\hat{\phi} : Y \longrightarrow X, \quad (x,y) \mapsto \left(\frac{y^2}{4x^2}, \frac{y(x^2 - a(t)^2 + 4b(t))}{8x^2}\right)$$

本研究では、Mordell-Weil rank が0という仮定のもとで、この様な楕円曲面はd=1,2,3,5,7の場合にのみ存在するということを証明した。また、各々の場合に具体的なWeierstrass 方程式を記述した。研究成果は論文としてまとめられ、立教大学数学雑誌に掲載される予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
① Kenji Koike, Elliptic K3 surfaces admitting a Shioda-Inose structure, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli (査読有) に掲載予定
② Kenji Koike, Hessian K3 surfaces of non-Sylvester type, Journal of Algebra, vol. 330 (2011), 388-403. (査読有)

〔学会発表〕（計１件）
① 小池健二, 楕円的 K3 曲面と塩田-猪瀬構造, 第 5 回玉原特殊多様体研究集会(東京大学玉原国際セミナーハウス), ２０１１年９月６日

６．研究組織
(1)研究代表者
小池　健二（KOIKE　KENJI）
山梨大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：２０３６２０５６

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし