

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：12612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740011

研究課題名(和文)幾何・圏論・組合せ論によるアフィンhecke環と量子群の表現論

研究課題名(英文)Representation theory of affine Hecke algebras and quantum groups via geometry, category and combinatorics

研究代表者

榎本 直也(Enomoto, Naoya)

電気通信大学・情報理工学(系)研究科・准教授

研究者番号：50565710

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：主として曲面の写像類群に付随するJohnson準同型の構造を表現論的観点から解明する研究を行った。Johnson準同型とは、曲面の写像類群を「次数付きリー環」によって近似するものであるが、1990年代、森田茂之氏によって導入された「森田障害」以降、一般的な結果は得られていなかった。

今回の研究では、佐藤隆夫氏と共同で、自由群の自己同型群に付随するJohnson準同型、曲面の写像類群に付随するJohnson準同型の余核の構造を一般線形群・シンプレクティック群の表現論を用いて解明する具体的に計算可能な枠組みを定式化すると同時に、その一例として「anti-森田障害」と呼ぶべき新しい無限系列を得た。

研究成果の概要(英文)：We mainly study the structure of Johnson cokernels for the mapping class group of surfaces via several representation theoretic approaches. The notion of Johnson cokernels gives an approximation of the mapping class group of surfaces using a certain graded Lie algebras. We have no series in the Johnson cokernels except for "the Morita obstruction" in 1990's.

In this research, we introduce a new class in Johnson cokernels for the automorphism groups of the free groups and the mapping class groups. Moreover, the class is combinatorially computable by using some representation theoretic method for the general linear groups and the symplectic groups. Moreover, we give a new series "anti-Morita obstructions" in the Johnson cokernels. This is a joint work with Takao Staoh.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：表現論 量子群 hecke環 結晶基底 大域基底 LLTA理論 曲面の写像類群 Johnson準同型

## 1. 研究当初の背景

2006年に筆者と柏原正樹氏は共同で、対称結晶と呼ばれる概念を導入し、B型アフィンヘッケ環のモジュラー表現における分解定数を記述する Lascoux-Leclerc-Thibon-有木型予想を定式化した。その後、2008年に柏原氏と共同で  $\mathfrak{gl}_\infty$  の対称結晶とそれに付随する大域基底の存在を証明し、組合せ論的記述を与えた。2009年に筆者は学位論文で、一般の対称カツ・ムーディー環の対称結晶について、対合を持つ筋の表現のモジュライ空間上の単純偏屈層を用いる幾何学的構成を与えた。本研究では、これらに基づき、アフィンヘッケ環の LLTA 型予想の証明や詳細な理解を目標としていた。しかし2010年に Varagnolo-Vasserot によって、当時爆発的に進展していた次数付き表現論の手法を用いて、筆者と柏原氏の提出した B 型アフィンヘッケ環に対する LLTA 型予想は証明されることとなった。

実際には、Varagnolo-Vasserot の証明だけからでは、例えば既約表現の組合せ論的なパラメライズのような詳細な構造の理解までは得られないし、そもそもわれわれの提出した LLTA 型予想ではカバーしていないパラメータが存在するなどの事情はあるものの、筆者は次に述べるような新しい研究の方向に着手した。

種数  $g$  で境界を 1 つ持つ向きづけられた献血コンパクトリーマン面に対する写像類群は微分同相の isotopy 群として得られる無限離散群である。このような無限離散群の構造を研究するひとつの方法として、filtration に関する次数商を取ることで次数付きリー環を得るというものがある。写像類群の場合、Johnson filtration と呼ばれる filtration を用いることで次数付きリー環が得られ、Johnson 準同型と呼ばれる写像を通じて、シンプレクティック微分のなすリー環  $\mathfrak{h}_{g,1}$  の部分リー環  $\mathfrak{t}_{g,1}$  として実現される。この構造を調べる研究は 1990 年代に森田茂之氏を中心とした精力的な研究がなされていたが、 $\mathfrak{t}_{g,1} \subset \mathfrak{h}_{g,1}$  のギャップがどの程度かという問題に対して、森田氏が導入した「森田障害」と呼ばれる系列以外に無

限系列は見つかっておらず、次数で見ても 4 次以下の部分のみ完全に決定されているというような状況にあった。

一方、当時同僚であった佐藤隆夫氏との議論の中で、筆者は、佐藤氏が研究を進めていた自由群の自己同型群に対する Johnson 準同型の理論に対して一般線型群の表現論を適用することにより、その構造を記述できるのではないかという着想を得たため、この方向で研究を開始した。

## 2. 研究の目的

自由群の自己同型群に対する Johnson filtration の類似物は 1960 年代に Andreadakis によって既に導入されていた。この filtration に関する次数商は、Johnson 準同型の類似物によって、自由リー環の微分代数の部分リー代数として得られる。佐藤隆夫氏はこの部分リー代数についての代数的な特徴づけを得ていた。一方、これらの次数付きリー代数にはいずれも一般線型群の作用があるため、まずこれらの一般線型群の表現としての既約成分や既約分解の記述を目標とした。

次に曲面の写像類群の場合を考えると、 $\mathfrak{t}_{g,1}, \mathfrak{h}_{g,1}$  にはいずれもシンプレクティック群の作用が入るため、シンプレクティック群の表現としての既約成分を調べることで、両者のギャップを定量的に評価でき、しかも従来からは知られていなかった新しい系列などが得ることを目標とした。

## 3. 研究の方法

- (1) 自由リー環の微分代数  $\text{Der}(\mathcal{L}_n)$  やシンプレクティック微分のなす次数付きリー環  $\mathfrak{h}_{g,1}$  は、いずれも一般線型群やシンプレクティック群の自然表現のテンソル積表現を介して構成されている次数付きリー環である。こうした空間に対する既約分解を記述するための有力な表現論的手法として「Schur-Weyl の相互律」と呼ばれるものがある。これを利用して、 $\text{Der}(\mathcal{L}_n)$  や  $\mathfrak{h}_{g,1}$  の既約分解を組合せ論的に記述することができる。
- (2) 自由群の自己同型群に対する Johnson 準同型の

構造を理解し, Johnson 像と  $\text{Der}(\mathcal{L}_n)$  のギャップを定量的に評価するために, 佐藤氏による余核の特徴づけを一般線型群の表現論で組合せ論的に記述する.

- (3) 写像類群に対する Johnson 準同型の像と余核の構造を理解するために, まず佐藤氏の解明した自由群の自己同型群に対する Johnson 準同型の余核の特徴づけを, 写像類群に対する Johnson 準同型の余核に引き戻す. これにより自由群の自己同型群からくる余核の成分の同定を行う. そのために, シンプレクティック群に対する Schur-Weyl 相互律と, いくつかの冪等元を用いた  $\mathfrak{h}_{g,1}$  の特徴づけを利用して, シンプレクティック群の表現としての既約成分に対応する「極大ベクトル」を記述する手法を用いる.

#### 4. 研究成果

- (1) 自由群の自己同型群に対する Johnson 準同型の余核の構造については次のような成果を得た.

- ① 佐藤氏が得ていた自由群の自己同型群に対する Johnson 準同型の余核は,  $\text{der}(\mathcal{L}_n)$  から縮約と巡回商によるものであった. 筆者は佐藤氏と共同で, 一般線型群に対する Schur-Weyl 相互律を適用することにより, この余核の一般線型群としての既約分解の完全な組合せ論的な記述を得た. これにより, 次に述べるような具体的な既約成分の重複度を定量的に決定できるようになり, あとで述べる写像類群に対する Johnson 準同型の余核の構造を調べる際に重要な役割を果たしている.
- ② 佐藤氏が見出していた既約成分 (写像類群に対する「森田障害」の類似物) の重複度がちょうど 1 であることを証明した.
- ③ Chen リー代数や polynilpotent リー代数といった対象についても Johnson 準同型の余核の既約成分を重複度を込めて完全に決定した.

これらの成果は発表論文 (4) としてまとめ出版された.

- (2) 曲面の写像類群に対する Johnson 準同型の余核の構造については次のような成果を得た.

- ① 佐藤氏の特徴づけた自由群の自己同型群に対する Johnson 準同型の余核を引き戻すことにより, 曲面の写像類群に対する Johnson 準同型の余核の中に新しいクラスを導入した.
- ② 森田氏によって導入されていた「森田障害」と呼ばれる余核の無限系列が, このクラスに属することを示し, しかもその重複度がちょうど 1 であることを示した.
- ③ 今まで知られていなかった新しい系列として, 「anti-森田障害」と呼ぶべきシンプレクティック群の既約表現の無限系列を発見し, その重複度がちょうど 1 であることを示した.

これらの成果は発表論文 (2) としてまとめ出版された.

われわれの研究以前,  $\mathfrak{t}_{g,1} \subset \mathfrak{h}_{g,1}$  の間には,  $\mathfrak{h}_{g,1}$  のアーベル化の核から得られる  $\mathfrak{t}_{g,1} \subset \text{Ker}^{\text{ab}} \subset \mathfrak{h}_{g,1}$  しか知られておらず, 我々の導入したクラスはこれとは全く異なる新しいクラスであるという点に意義があると同時に, われわれの用いた表現論的記述によって, このクラスに含まれる既約成分を原理的には計算可能なものとして取り扱うことができるようになった点に意義がある. 実際, われわれの導入したクラスは, 森田-逆井卓也-鈴木正明氏による低次数の場合の Johnson 余核の完全な決定にも大きな役割を果たしている.

また, 「anti-森田障害」以外にも具体的な既約成分と重複度を決定することを試み, 次の部分的な結果を得た.

- ④ フック形のヤング図形によってパラメトライズされるシンプレクティック群の既約表

現の系列の中で，Johnson 余核に含まれるものを同定した．これによりさらに多くの無限系列が Johnson 余核に含まれることが判明した．この結果は榎本彦衛氏との共同研究として発表論文 (1) にまとめ出版された．また，さらにいくつかの系列についても結果を得ており，現在論文執筆中である．

これらの成果から示唆されることは，曲面の写像類群から得られる次数付きリー環の像とのギャップ  $t_{g,1} \subset h_{g,1}$  が従来のまでの認識を改めるものであった．

他方，われわれの研究と同時期に，全く違う方向性から 2 つの大きな成果が報告されている．ひとつは，Conant-Kassabov-Voghtmann による hairy graph complex を用いるもので，これにより  $\text{Ker}^{ab} \subset h_{g,1}$  に属する新しい無限系列が同定された．もうひとつは，河澄響矢-久野雄介氏によるトポロジカルなアプローチである．

- ⑤ 筆者は佐藤-久野両氏と共同で，われわれの得た「anti-森田障害」が河澄-久野のアプローチにおける先導項には含まれていない既約成分であることを確かめた．これは現在論文執筆中である．

このように，われわれの成果を皮切りに近年曲面の写像類群の Johnson 理論には，豊富な幾何的・組合せ論的・表現論的な構造が見出されつつある．

本研究の当初の目的であるアフィン・ヘッケ環の LLTA 型理論の研究とは結果として異なる方向性の成果になったが，例えばこれらの表現論的なアプローチや組合せ論を統制する枠組みは現状ではよくわかってない．そのために，LLTA 型理論へのアプローチの中で進展してきた圏論化の手法などが応用できる可能性を探ることに意味があると思われる．例えば， $h_{g,1}$  に作用するより大きな「対称性」(リー代数)や  $h_{g,1}$  自身が別の空間に対称性として働く枠組みを見出すことや， $h_{g,1}$  の「量子化」などの観点は，共形

場理論や結び目不変量，Drinfeld アソシエーターの理論との関連の中で研究すべき課題であると思われる．

## 5. 主な発表論文等 〔雑誌論文〕(計 7 件)

- (1) Hikoe Enomoto and Naoya Enomoto, Sp-irreducible components in the Johnson Cokernels of the mapping class group of surfaces I, J. Lie Theory, vol.24-no.3 (2014) 687–704, 査読有, 採録決定済
- (2) Naoya Enomoto and Takao Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, Algebraic & Geometric Topology, 2 (2014) 627–669, DOI:10.2140/agt.2014.14.627, 査読有, 採録決定済
- (3) Naoya Enomoto, Corrigendum to “ A Quiver Construction of Symmetric Crystals ”, Int Math Res Notices (2012) Vol. 2012 1198-1200, doi: 10.1093/imrn/rnr012, 査読無
- (4) Naoya Enomoto and Takao Satoh, On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps, Algebraic & Geometric Topology 11 (2011) 2861–2901, DOI:10.2140/agt.2011.11.2861, 査読有
- (5) 榎本 直也, 曲面の写像類群に付随する Johnson 余核の  $S_p$ -加群構造について, 数理解析研究所講究録 1770 巻, p.162-p.173, 2011 年, 査読無
- (6) 榎本 直也, 曲面の写像類群に付随する Johnson 余核の  $S_p$ -加群構造について, リーマン面に関連する位相幾何学 2011 予稿集, p.22-p.33, 2011 年, 査読無
- (7) 榎本 直也, 曲面の写像類群に付随する Johnson 余核の  $S_p$ -加群構造について, 第 14 回代数群と量

子群の表現論研究集会報告集, p.120-p.131, 2011年, 査読無

〔学会発表〕(計 11 件)

- (1) 榎本直也, 曲面の写像類群に付随する Johnson 準同型への表現論的アプローチ, 代数セミナー, 信州大学, 2013.6.14.
- (2) 榎本直也, A representation theoretic approach to the Johnson cokernels II, Workshop: Johnson homomorphisms, 東京大学数理科学研究科, 2013.6.3-7
- (3) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, 代数幾何とその周辺, 北海道大学, 2012.8.6-8
- (4) 榎本直也, Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki type theory for affine Hecke algebras I・II, Geometric/categorical aspects of representation theory, Hokkaido University, 2012.2.19-22
- (5) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, 微分トポロジーセミナー, 京都大学理学研究科, 2011.10.25.
- (6) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, リーマン面に関連する位相幾何学 2011, 東京大学数理科学研究科, 2011.9.3-9.6
- (7) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, 表現論と調和解析における諸問題, 京都大学数理解析研究所, 2011.6.28-7.1
- (8) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, 第 11 回代数群と量子群の表現論研究集会, 小豆島国民休暇村, 2011.6.2-6.5
- (9) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, 表現論セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2011.5.27.
- (10) 榎本直也, アフィンヘッケ環の Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki 理論について, 数学談話会, 京都大学理学研究科, 2011.5.11.
- (11) 榎本直也, 曲面の写像類群に対する Johnson 余核の  $Sp$ -加群構造について, 大阪表現論セミナー, 大阪市立大学梅田サテライト, 2011.2.17.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

榎本 直也 (Enomoto Naoya)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：5 0 5 6 5 7 1 0