

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 5 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010 年度～2011 年度

課題番号：22740012

研究課題名（和文） 遠アーベル幾何学の数論的及び組み合わせ論的研究

研究課題名（英文） Arithmetic and Combinatorial Study of Anabelian Geometry

研究代表者

星 裕一郎 (HOSHI YUICHIRO)

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：50456761

研究成果の概要（和文）：

望月新一氏との共同研究によって、組み合わせ論的遠アーベル幾何学の基礎理論の整備を行い、特に、その応用として、標点付き曲線のモジュライ空間上の普遍曲線に対する遠アーベルグロタンディーク予想の幾何学版を証明した。双曲的曲線のモノドロミー充満性の研究を行い、特に、準モノドロミー充満性の 1 独立の問題に反例を与えた。数体上の曲線に対する双有理セクション予想の研究を行い、特に、有理数体や虚二次体上の代数曲線の双有理ガロアセクションに対して、それが幾何的となるための必要充分条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：

By a joint work with Shinichi Mochizuki, I developed the fundamental theory of the combinatorial anabelian geometry. As an application of this theory, I and Shinichi Mochizuki proved a geometric version of Grothendieck's anabelian conjecture for the universal curve over the moduli stack of pointed curves. In the study of the monodromic fullness of hyperbolic curves, I gave a counter-example of the problem of the 1-independency of quasi-monodromic fullness. In the study of the birational section conjecture for curves over number field, I obtained a necessary and sufficient condition for a birational Galois section of a curve over a small number field to be geometric.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	700000	210000	910000
2011 年度	600000	180000	780000
年度			
年度			
年度			
総計	1300000	390000	1690000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：双曲的曲線、数論的基本群、配置空間群、組み合わせ論的遠アーベル幾何学、副有限デーン捻り、モノドロミー充満、セクション予想、双有理セクション予想

1. 研究開始当初の背景

（1）組み合わせ論的遠アーベル幾何学：望月新一氏によって組み合わせ論的な視点による遠アーベル幾何学の研究が行われ、特に、

I P S C 型の外表現に関する遠アーベルグロタンディーク予想型の結果が証明された。その後、星と望月新一氏の共同研究によって、この遠アーベル予想型の結果は、N N 型の外

表現に対して部分的に一般化され、それを用いて、配置空間群のFC適合的自己同型射に対する組み合わせ論的カスプ化の単射性部分が完全に証明された。そして、この単射性の系として、松本眞氏によって曲線がアフィンの場合に証明されていた、双曲的曲線に付随する外ガロア表現の忠実性が、曲線固有な場合にも証明された。一方、玉川安騎男氏と望月新一氏の共同研究によって、(ある例外的な型を除いて)配置空間群の任意の自己同型射が、置換を除いてF適合的となることが証明されていた。

(2) 双曲的曲線に対するモノドロミー充満性の研究：およそ十年ほど前に、玉川安騎男氏と松本眞氏の共同研究によって、数体上定義された非常に多くの双曲的曲線に対して、付随する外ガロア表現の像が可能な限り最大となる(つまり、普遍モノドロミー外表現の像と一致する)、という事実が証明された。しかし、それ以降、そのような性質を持つ曲線(つまり、モノドロミー充満な曲線)の研究は行われておらず、例えば、モノドロミー充満な双曲的曲線の具体的な例すら、星の知る限り、一つも知られていなかった。また、特に、モノドロミー充満な双曲的曲線の存在発見当時から(楕円曲線に付随する1進表現に関するセール氏の定理との比較から)懸念となっていた「準モノドロミー充満性の1独立の問題」についての研究は、ほとんどまったく行われていない、という状況であった。

(3) 双曲的曲線に対するセクション予想： $p$ 進局所体上の曲線に対する双有理セクション予想は、その副有限版に対してコーニグスマン氏が、副 $p$ 版に対してポップ氏が、それぞれ証明を与えていた。数体上の曲線に対する双有理セクション予想、及び、数体や $p$ 進局所体上の双曲的曲線に対するセクション予想は未解決であるが、問題の写像の単射性は、副有限版に対してはグロタンディーク氏自身によって、副 $p$ 版に対しては望月新一氏が、それぞれその証明を与えていた。また、この予想が成立するような曲線の例は、いくつか与えられていた。一方、数体や $p$ 進局所体上の双曲的曲線に対するセクション予想に関して、その副 $p$ 版には反例が存在することが星によって知られていた。

## 2. 研究の目的

(1) 組み合わせ論的遠アーベル幾何学：組み合わせ論的遠アーベル幾何学の基礎理論の整備、特に、配置空間群のF適合的自己同型射のC適合性、及び、副有限デーネ捨りという概念の理解を今研究の主要な目的とした。

(2) 双曲的曲線のモノドロミー充満性の研究：準モノドロミー充満性の1独立の問題の解決のために、モノドロミー充満な双曲的曲

線の一般論の理解やそのような曲線の具体例の発見を今研究の主要な目的とした。

(3) 双曲的曲線に対するセクション予想：数体や $p$ 進局所体上の双曲的曲線に対するセクション予想、あるいは、数体上の曲線に対する双有理セクション予想を解決するために、ガロアセクションや双有理ガロアセクションが幾何的(つまり、有理点から生じる)となるための必要充分条件の探求を今研究の主要な目的とした。

## 3. 研究の方法

(1) 組み合わせ論的遠アーベル幾何学：望月新一氏によるIPSC型の外表現に関する遠アーベルグロタンディーク予想型の結果、及び、星と望月新一氏の共同研究によるNN型の外表現に関する遠アーベルグロタンディーク予想型の結果を出発点として、PSC型遠半グラフ(やその基本群)の構造を理解する、という方法で研究を行った。

(2) 双曲的曲線のモノドロミー充満性の研究：双曲的曲線に付随する外ガロア表現についてこれまでに得られていた事実、組み合わせ論的遠アーベル幾何学の研究から導かれる事実を合わせて考察することによって、その研究を行った。

(3) 双曲的曲線に対するセクション予想：与えられた曲線の幾何的なガロアセクションや双有理ガロアセクションが自然に備える性質に対して、幾何性とそういった性質との間には純群論的のどの程度の差があるのだろうか、という問題を考え、それを出発点として研究を行った。

## 4. 研究成果

(1) 組み合わせ論的遠アーベル幾何学：望月新一氏との共同研究によって、真に次元の大きい配置空間群のF適合的同型射から生じる配置空間群の同型射のFC適合性の証明、「部分グラフへの制限」「部分的コンパクト化」「部分的正規化」「部分的変形」といったPSC型遠半グラフに対する基本的操作の整備、PSC型遠半グラフの第二コンパクト台コホモロジー群の理論の整備、PSC型遠半グラフの副有限デーネ捨りたちのなす群がスキーム論から生じるそのような群と一致することの証明、円分物の群論的な同期化とスキーム論的な同期化の比較、PSC型遠半グラフの基本群への外作用のNN性・IPSC性の副有限デーネ捨りによる特徴付け、PSC型遠半グラフの基本群の外部自己同型群の中での副有限デーネ捨りたちのなす群の中心化群や正規化群の計算、などを行った。また、これら一般論の展開の後に、この理論の応用の一つとして、標点付き曲線のモジュライ空間上の普遍曲線に対する遠アーベルグロタンディーク予想の幾何学版を

証明した。

(2) 双曲的曲線に対するモノドロミー充満性の研究：双曲的曲線に対するモノドロミー充満性の理論の非常に基礎的な部分の整備を行い、その性質に関するいくつかの事実、例えば、特殊な対称性を持つ曲線はモノドロミー充満とはならない、や、モノドロミー充満な曲線のヤコビ多様体は単純で虚数乗法を持たない、などといった事実を証明した。また、従来の遠アーベルグロタンディーク予想（の副1版）を用いて、種数が0であるようなモノドロミー充満な双曲的曲線に対して、遠アーベル予想型の結果（そのような曲線の同型類のガロア理論的特徴付け）を証明した。また、双曲的曲線の配置空間の点やガロアセクションに対してモノドロミー充満という概念を定義して、その一般論の研究を行い、特に、配置空間のモノドロミー充満な点に対する遠アーベル予想型の結果（そのような点の同値類のガロア理論的特徴付け）の証明や、モノドロミー充満なガロアセクションが幾何的となるための必要充分条件を与えた。一方、種数が0、標点の数が4であるような双曲的曲線に対するモノドロミー充満性のより詳細な研究を行い、特に、そのような曲線が、ほとんどすべての素数でモノドロミー充満となるための充分条件、及び、いかなる素数においても準モノドロミー充満にならないための充分条件を与えた。そして、この充分条件たちによって、準モノドロミー充満性の1独立の問題に反例を与えて、また、虚二次体上分裂するような種数が0、標点の数が4である双曲的曲線に対して、ある素数でモノドロミー充満になることと、ほとんどすべての素数でモノドロミー充満になることが同値であることを証明した。

(3) 双曲的曲線に対するセクション予想：双曲的曲線のガロアセクションに対して、そのようなセクションが定めるガロア表現という観点から、ガロアセクションの分岐の理論を展開した。また、有理数体や虚二次体上の代数曲線の双有理ガロアセクションに対して、それが幾何的（つまり、有理点から生じる）となるための必要充分条件を与えた。そして、双有理セクション予想の副可解版が成立するような数体上の代数曲線の例を与えた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1: Yuichiro Hoshi and Mochizuki Shinichi, On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations, Hiroshima Mathematical

Journal, 査読有, 41, 2011, 275-342, URL: <http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1323700038>.

2: Yuichiro Hoshi, Galois-theoretic characterization of isomorphism classes of monodromically full hyperbolic curves of genus zero, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, 203, 2011, 47-100, DOI: 10.1215/00277630-1331863.

3: 星裕一郎, 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B19, 2010, 81-106. (DOI URL とも無)

4: Yuichiro Hoshi, Existence of nongeometric pro-p Galois sections of hyperbolic curves, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 査読有, 46, 2010, 829-848, DOI: 10.2977/PRIMS/27.

[学会発表] (計11件)

1: 星裕一郎, 双曲的曲線に付随する外Galois表現の核や像について, 早稲田整数論セミナー, 2012年1月20日, 早稲田大学(東京都).

2: 星裕一郎, 双曲的曲線に付随する外Galois表現の核や像について, 大阪大学整数論&保型形式セミナー, 2011年11月11日, 大阪大学(大阪府).

3: 星裕一郎, Grothendieckによる遠アーベルセクション予想について, 第56回代数学シンポジウム, 2011年8月11日, 岡山大学(岡山県).

4: 星裕一郎, Grothendieck Conjecture over Local Fields --- from "Relative" to "Absolute" ---, Automorphic forms and Galois representations, 2011年7月23日, Durham University (イギリス・ダラム).

5: 星裕一郎, Classical Anabelian Geometry, Automorphic forms and Galois representations, 2011年7月22日, Durham University (イギリス・ダラム).

6: 星裕一郎, On a problem of Matsumoto and Tamagawa concerning monodromic fullness of hyperbolic curves, Seminaire de Theorie des Nombres, 2011年6月24日, Universite de Bordeaux 1 (フランス・ボルドー).

7: 星裕一郎, Galois-theoretic

characterization of isomorphism classes of monodromically full hyperbolic curves of genus zero, Seminaire de theorie des nombres de l'IMJ, 2011 年 6 月 20 日, Universite de Paris 6 (フランス・パリ).

8: 星裕一郎, Survey on the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves, Development of Galois-Teichmuller theory and anabelian geometry, 2010 年 10 月 30 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府).

9: 星裕一郎, On cuspidalization and anabelioids, Galois-theoretic Arithmetic Geometry, 2010 年 10 月 22 日, 国際高等研究所 (京都府).

10: 星裕一郎, Monodromic fullness in the anabelian geometry II, 数論幾何学ワークショップ 2010, 2010 年 8 月 3 日, 沖縄尚学高等学校 (沖縄県).

11: 星裕一郎, Monodromic fullness in the anabelian geometry I, 数論幾何学ワークショップ 2010, 2010 年 8 月 2 日, 沖縄尚学高等学校 (沖縄県).

[その他]

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yuichiro/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

星 裕一郎 (HOSHI YUICHIRO)

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号 : 50456761