# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２７ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２７４００１４
研究課題名（和文）接続付きベクトル束のモジュライと導来圏

研究課題名（英文）Moduli of vector bundles with connection and derived category

研究代表者
稲場　道明（Inaba, Michiaki）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：８０３５９９３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,000,000円、（間接経費）　600,000円

研究成果の概要（和文）：代数曲線上確定特異点を持つ放物接続のモジュライ空間から基本群の表現のモジュライ空間へのリーマン・ヒルベルト射が固有射であることを証明し、その結果、モノドロミー保存変形が幾何学的パンルベ性を持つことを明快に示すことができた。この一連の研究は岩崎氏、齋藤氏との共同研究に始まるが、本研究課題において著しい一般化を行い、研究の集大成を得ることができた。この研究結果により、古典的に知られているパンルベ第６方程式をモジュライ空間の幾何を用いて明快に理解することができた。

研究成果の概要（英文）：I proved that the Riemann-Hilbert morphism from the moduli space of regular singular parabolic connections on a projective curve to the moduli space of fundamental group is a proper morphism. As an application, the isomonodromic deformation on the moduli space has the geometric Painleve property. The series of this study started at the joint work with Iwasaki and Saito. During this project, I generalized the theory extremely and published the final paper.
From this result, we can understand the classical Painleve sixth equation by the geometry of moduli spaces.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： モジュライ　ベクトル束　接続　導来圏

## １．研究開始当初の背景

パンルベ第６方程式を理解するために岩崎克則氏、齋藤政彦氏との共同研究で射影直線上で確定特異点を持つ階数２の放物接続のモジュライ空間の構成とリーマン・ヒルベルト射の固有性を示し、その結果ガルニエ方程式の幾何学的パンルベ性を得ることができていた。特に確定特異点が４個の場合はパンルベ第６方程式の岡本初期値空間をそのコンパクト化とともに復元することができていた。これはパンルベ方程式の幾何学をモジュライ空間の幾何学を用いて理解するという画期的な研究の出発点であった。
一方、導来圏のモジュライ問題に関しては、研究代表者の初期の研究結果として、射影スキーム上の連接層の導来圏の対象のモジュライを代数空間として実現できるという内容の論文を出版していた。これは、導来圏のモジュライ問題が合理的であることを本格的に提示した結果であった。それとは独立に、ブリッジランドによって数理物理から動機づけられた三角圏における安定性の概念を数学的に定式化するという業績があり、以後導来圏の研究の一大ブームを引き起こすことになる。

## ２．研究の目的

研究背景を踏まえて、階数が一般で一般種数の曲線の場合に放物接続のモジュライ理論を拡張する理論を作り、リーマン・ヒルベルト射の固有性を示すことによって、モジュライ空間上定義されたモノドロミー保存変形の幾何学的パンルベ性を示すことが目的であった。この周辺分野においては、確定特異点を持つ線形常微分方程式のモジュライ空間を記述する等の先行研究はいくつか見られたようであるが、実際にはモジュライの定義が適切とは言い難く、安直にモジュライ空間を定義する目的でベクトル束を自明にしてしまったがためにモジュライ空間上定義されるモノドロミー保存変形の幾何学的パンルベ性が満たされず、初期値空間とは呼べないようなものであった。モジュライ空間を適切に定義して初期値空間として構成することは、モノドロミー保存変形の幾何学を理解するために不可欠のものであった。
一方、導来圏の対象のモジュライに関しては、一応モジュライ空間の概念は正当であることは認識できていたが、射影多様体としてのモジュライが系統立てて構成できるかが問題であり、これを実行したいという研究動機があった。また、ブリッジランドの提唱していた安定性については、どの程度モジュライの存在が保障されるか不明であったこと、実際の具体例は必ずしも明快に多数あったわけではなかったことから、通常の安定層のモジュライ空間のように実際に多数存在するモジュライ空間の構成を行いたかった。

## ３．研究の方法

リーマン・ヒルベルト射の解析のためには放物接続のモジュライ空間についての様々な基本性質を証明しておくことが重要で、その中で、非特異性、期待次元を持つこと、シンプレクティック形式の存在等はモジュライの定義から比較的自然に証明できるものではあった。一方、最も証明が困難だったのはモジュライ空間の既約性であった。実際には膨大な量の緻密な計算の積み上げにより、既約性の証明が得られた。これらの準備のもとでリーマン・ヒルベルト射の性質、つまり双有理型で固有な全射であることを証明した。具体的にリーマン・ヒルベルト射の性質の証明をするためには、まず放物接続のモジュライと基本群の表現のモジュライとの関係を概念的に明確にするために、ベクトル束のエレメンタリー変換が放物接続のモジュライ空間において持つ意味を明快にしておく必要があった。ベクトル束のエレメンタリー変換は丸山正樹氏によって大きな研究が展開されたものであったが、代数曲線上でのリーマン・ヒルベルト対応をモジュライ空間において理解するために本質的な概念であることが認識できた。実際のリーマン・ヒルベルト射の固有性の証明の基本アイディアは、放物接続のモジュライ空間をある種のコンパクトなモジュライ空間へ埋め込めることを用いることによって得られる。この証明手法は代数幾何的モジュライ理論の手法の典型的なものである。
一方、導来圏の対象のモジュライに関しては、もともと安定層のモジュライ空間を構成する時に箙表現のモジュライ空間への埋め込みを用いて構成できることを発見しており、このアイディアを用いて何らかの意味のあるモジュライ空間の構成を行おうと考えていた。

## ４．研究成果

研究の方法に従って研究目的であった代数曲線上で確定特異点を持つ放物接続のモジュライとリーマン・ヒルベルト射の固有性の証明を中心とする集大成となるべき論文（[3]）を完成させて出版することができた。この結果は、もともとの目的であったパンルベ第６方程式の理解に留まらず、より一般のシュレジンガー方程式のさらに一般化である一般種数の代数曲線上確定特異点を持つ線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を幾何学的に適切な形で定式化し、そのパンルベ性の根拠を明確にしている。つまり、リーマン・ヒルベルト射の固有性から、モノドロミー保存変形の幾何学的パンルベ性が従う。むしろ、この幾何学的パンルベ性が従うようにモジュライ空間を上手に定義できたことに意味がある。この結果として、モジュ

ライ空間がモノドロミー保存変形の微分方程式の初期値空間としてみなすことができた意義が大きい。一方、この論文におけるリーマン・ヒルベルト射は接続のモジュライと基本群の表現のモジュライとの間の一対一対応ではなく、基本群の表現のモジュライ空間の特異点解消として放物接続のモジュライ空間が得られ、その間の射としてリーマン・ヒルベルト対応が活躍するという形で定式化している。この定式化に馴染まないという意見もあるが、特異点を持つ部分のファイバーであるエクセプショナルローカスは丁度モノドロミー保存変形の微分方程式の特殊解を与えている部分に対応していて微分方程式の立場からも重要であり、意味を明確に認識するためにも敢えて一対一対応にはせずに特異点を強調する方が明快であると考えている。また、古典的にはモノドロミー保存変形はシュレジンガー方程式として記述するという方法が広く知られており、その結果微分方程式が代数的に定義されたものであることがわかっていたが、論文[3]においては一般種数の代数曲線上でもモノドロミー保存変形の微分方程式が代数的に定義されているということも証明できている。この証明は微分方程式を式で書き下すという手法には程遠いが、モノドロミー保存変形の一次微分を本質的に捉える証明であり、不確定特異点の場合の一般モノドロミー保存変形を拡張的に考える時にも有用な手法になるのではないかと期待している。
また、モジュライ空間の上で定義される相対シンプレクティック形式の存在は驚くべきことではなかったが、自然に代数幾何学的に定義できて、特に閉形式になることの証明を厳密に与えたのは意味ある結果であったと思われる。
この主結果を導いた方法の副産物として、不分岐不確定特異点を持つ放物接続のモジュライ空間の定式化を行い、非特異性、期待次元を持つこと、大抵の場合は幾何学的パンルベ性を持つことを証明した論文([1])を齋藤政彦氏との共著で出版した。この結果は実質的には論文[3]の手法を容易に拡張できる部分を書いただけではあるが、不確定特異点を持つ接続のモジュライ空間上でもシンプレクティック形式が定義できて、それが閉形式であることの証明に確定特異点を持つ接続のモジュライ空間からの退化の理論を用いている所が自慢のアイディアである。
また、スペクトル型を固定した放物接続のモジュライ空間の定式化を行い、モジュライ空間の非特異性、期待次元を持つこと、幾何学的パンルベ性などの結果も得ることができた。これは研究発表の[2]に対応する物である。
一方、導来圏のモジュライ問題についての研究に関しては、アーベル曲面または K3 曲面上の連接層の導来圏の対象のモジュライ空間も非特異となり、自然にシンプレクティック形式が存在するという内容の論文([4])を出版した。そして三角圏における豊富列から定まる安定性の概念を提唱し、安定な対象のモジュライ空間を（準）射影スキームとして構成できるという内容の論文([5])を出版し、日本数学会論文賞を受賞するに至った。この論文の結果として、従来の（半）安定層のモジュライ空間を箙表現のモジュライ空間に埋め込む形で構成することができることがわかり、モジュライの構成に関わる面倒な証明を簡略化することはできた。この例に限らず、多くのモジュライ空間の代数幾何学的構成は箙表現のモジュライを用いると容易になることが多いことを示唆している。

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

[1] 著者：Inaba, Michi-aki; Saito, Masa-Hiko
論文名：Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve.
雑誌名: Kyoto J. Math.
巻： 53 (2013), no. 2, 433-482

[2] 著者：Inaba, Michi-aki
論文名：Stability and moduli on a triangulated category. (Japanese)
雑誌名：Sūgaku
巻： 65 (2013), no. 2, 160-173.

[3] 著者：Inaba, Michi-Aki
論文名：Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence.
雑誌名：J. Algebraic Geom.
巻： 22 (2013), no. 3, 407-480.

[4] 著者：Inaba, Michi-aki
論文名：Smoothness of the moduli space of complexes of coherent sheaves on an abelian or a projective K3 surface.
雑誌名：Adv. Math.
巻： 227 (2011), no. 4, 1399-1412.

[5] 著者：Inaba, Michi-aki
論文名：Moduli of stable objects in a triangulated category.
雑誌名：J. Math. Soc. Japan
巻： 62 (2010), no. 2, 395-429.

〔学会発表〕（計 2 件）

[1] 発表者名：Michi-aki Inaba
発表標題：Moduli of parabolic connections and compactification

学会等名：Workshop on ``Moduli theory in Algebraic geometry and Integrable systems"
発表年月日：2013/9/18
発表場所：RIMS,Kyoto
講演の種類：招待

[2] 発表者名：Michiaki Inaba
発表標題：Moduli of parabolic connections of spectral type
学会等名：Various Aspects on the Painlevé Equations
発表年月日：2012/11/26
発表場所：RIMS,Kyoto
講演の種類：招待

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

稲場 道明　　　(Michiaki Inaba　　)

研究者番号：80359934

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：