様式Ｃ－１９

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 3 日現在

機関番号：14401
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2010　～　2012
課題番号：22740016
研究課題名（和文）　代数曲線上の線形系の研究と一般型代数多様体への応用
研究課題名（英文）　A study of linear systems on algebraic curves and its application for varieties of general type
研究代表者
春井　岳（HARUI TAKESHI）
大阪大学・大学院理学研究科・研究員
研究者番号：00437336

研究成果の概要（和文）：(1) 非特異平面曲線の自己同型群の分類を得た．(2) ヒルツェブルフ曲面上の曲線の自己同型群を分類した（大渕朗氏との共同研究）．(3) 平面4次曲線の二重被覆のワイエルシュトラス半群を調べた（米田二良氏との共同研究）．(4) 代数曲線の平面モデルの最小次数について研究し，特殊な曲線を分類した（大渕朗氏との共同研究）．(5) 代数曲面上の線形系の中で，不変量が異なる曲線が共存する場合について調べた（加藤崇雄，大渕朗両氏との共同研究）．(6) 曲線から射影空間の中への埋め込みの最小次数について研究した．(7) 種数の小さな代数曲線について，最小次数のペンシルの個数を決定した（大渕朗氏との共同研究）．

研究成果の概要（英文）：(1) We obtained a classification of automorphism groups of smooth plane curves. (2) We classified automorphism groups of curves on Hirzebruch surfaces (joint work with Akira Ohbuchi). (3) We studied Weierstrass semigroups of double coverings of smooth plane quartics (joint work with Jiryo Komeda). (4) We studied the minimal degree of plane models of algebraic curves and obtained a classification of some special curves (joint work with Akira Ohbuchi). (5) We studied linear systems on algebraic surfaces containing curves with different invariants (joint work with Takao Kato and Akira Ohbuchi). (6) We studied the minimal degree of embeddings of curves into projective spaces. (7) We determined the number of pencils of minimal degree on curves of small genus (joint work with Akira Ohbuchi).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何，代数曲線，線形系，平面曲線，自己同型，ワイエルシュトラス点

１．研究開始当初の背景

代数曲線は古くから研究されてきたが，まだわからないことが多く残されている．とくに曲線上の特殊線形系や曲線の自己同型群について研究すべきことが無数にある．また，高種数の代数曲線束や高次元の代数多様体の構造と，その上の代数曲線の情報との関わりはほとんどわかっていない．

２．研究の目的

⑴ 代数曲線上の線形系や自己同型群について詳しく調べること

⑵ 代数曲線論を用いて，高種数の代数曲線束や高次元代数多様体を研究すること

３．研究の方法

代数曲線の不変量や平面モデルを利用して特殊線形系や自己同型群を調べる．また，曲線とそれを含む代数多様体との関連を調べる．

４．研究成果

(1) 非特異平面曲線の自己同型群について研究した．次数4以上の非特異平面曲線の自己同型群は射影線形群の部分群とみなせるので，2次元射影線形群の有限部分群の分類を利用することができる．とくに，このような群は少数の例外を除いてある直線か三角形を固定することがわかる．その結果，次数4以上の非特異平面曲線の自己同型群は大きく分けると(a) 巡回群，(b) 1次元射影線形群の有限部分群の巡回拡大，(c) フェルマー型，(d) クライン型，(e) 2次元射影線形群の原始的有限部分群，の五種類に分類されることがわかり，群構造を決定することができた．この結果を用いることで，多くの非特異平面曲線の自己同型群を完全に決定することができる．とくに，この分類を利用して自己同型群の位数が大きい場合を詳しく調べ，特殊な曲線の分類を行った．その他，次数を固定したとき，最大位数の自己同型群をもつ曲線が（射影同値を除いて）ただ一つであることの簡単な証明を与えた．とくに曲線の次数が4，6以外のとき，最大位数の自己同型群をもつ非特異平面曲線はフェルマー曲線と射影同値であることがわかった．今後，正標数の場合や曲線が特異点をもつ場合，射影空間内の非特異超曲面の自己同型群の研究など，様々な一般化を行うことを考えている．

(2) ヒルツェブルフ曲面上の曲線の自己同型群について，大渕朗氏と共同研究を行った．高橋剛氏により，そのような曲線の自己同型群はヒルツェブルフ曲面の自己同型群に延長されることが示されている．それを利用して非特異平面曲線の場合と同様の手法を応用することにより，曲線の自己同型群の構造や位数の上限を決定することができた．

(3) 平面4次曲線の二重被覆のワイエルシュトラス半群として現れる数値的半群について米田二良氏と共同研究を行った．まず可能性のある数値的半群のリストを得た上で，非特異平面4次曲線の幾何学的な性質を利用することにより，ほとんどの半群を実現するような具体的な代数曲線を構成することができた．今後，残っている場合についても曲線の構成を行う予定である．

(4) 代数曲線の平面モデルの最小次数s(2)について大渕朗氏と共同研究を行い，種数11の場合にs(2)=11となる曲線は存在しないことを示した．その結果，種数gでs(2)=gをみたす曲線の分類が得られた．

(5) 代数曲面上の線形系の中で，不変量が異なる代数曲線が共存する場合について，加藤

崇雄，大渕朗両氏と共同研究を行った．主にゴナリティについて考察し，超楕円曲線と非超楕円曲線をともに含む線形系について詳しく調べた． 今回の研究では，与えられた配置の特異点をもつ平面曲線の非特異モデルとして超楕円曲線とトリゴナル曲線（ゴナリティ3の曲線）がともに現れる場合について考察した．よく知られている曲面上の曲線についてはある程度ゴナリティが決定されているが，線形系の中でゴナリティが不変かどうかについてはまだほとんど知られておらず，曲線論やそれを応用した曲面の研究において重要になると思われる．

(6) 代数曲線から射影空間の中への双有理写像や埋め込みの最小次数について研究した．これらはゴナリティやクリフォード指数ほど研究が進んでいない不変量である．まず種数の小さい曲線の二重被覆についてこれらの不変量を決定した．また，種数がある程度大きい場合，二つの不変量が一致しない曲線が必ず存在することを示し，具体的な例を構成した．このような曲線はこれまで双楕円曲線（楕円曲線の二重被覆）などごく少数しか知られていなかったが，今回構成した曲線はまったく異なる性質の曲線である．

(7) 種数の小さな代数曲線について大渕朗氏と共同研究を行い，ゴナリティ（射影直線への被覆の最小次数）を与えるペンシル（あるいは写像）の個数を決定した．主に種数8の曲線が平面7次曲線のモデルをもつ場合を扱い，その特異点の配置とペンシルの個数との関係を明らかにした． この場合平面7次モデルは7つの2重点をもち，この7つが同一の2 次曲線上にあるか否かで場合が分かれる．前者の場合には次数5のペンシルは高々7個であり，すべての場合が実際に起こることを示した．後者の場合，次数5のペンシルは高々14 個である．このとき個数が2以上の場合はすべて実際に起こり，個数1という場合のみ実際には起こらないことを明らかにした．このような結果は種数8 で初めて現われるものであり，興味深いと思われる．また各々の場合に，曲線の定義方程式を書き下すことにより明瞭な具体例を得た．その他，種数8以外でゴナリティが小さい場合にも，最小次数のペンシルの個数を決定した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① 春 井 岳 ， On a classification of automorphism groups of smooth plane curves, 研究集会「第 10 回 代数曲線論シンポジウム」報告集，査読無，(2013), 7-16.
② 春井岳， Examples of coexistence of hyperelliptic curves and trigonal curves in a linear system，研究集会「第八回 代数曲線論シンポジウム」報告集，査読無, (2011), 15-20.
③ 春井岳，大渕朗，On the number of pencils of minimal degree on curves with small gonality, JP Journal of Geometry and Topology, 査読有，10 巻，(2010), 191-229.

〔学会発表〕（計 7 件）

① 春井岳，非特異平面曲線の自己同型群について，第 3 回 代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 2013. 5. 11， 首都大学東京 秋葉原サテライトキャンパス.
② 春 井 岳 ， Automorphism groups of smooth plane curves, 研究集会「第 10 回 代数曲線論シンポジウム」， 2012.12.16，日本大学.
③ 春井岳，超楕円曲線と trigonal 曲線の共存について，日本数学会 2011 年度秋季総合分科会(代数学分科会)，2011.9.30，信州大学.
④ 春井岳， On the minimal degree of simple linear systems on algebraic curves, Seminar on algebraic geometry, 2011.9.9, Seoul National University.
⑤ 春井岳，超楕円曲線と trigonal 曲線の共存について，高知大学代数幾何セミナー2011 冬，2011.2.8，高知大学.

⑥ 春井岳, 代数曲線上の特殊因子に関する不変量について, 高知大学代数幾何セミナー2011 冬, 2011.2.7, 高知大学.
⑦ 春井岳, Examples of coexistence of hyperelliptic curves and trigonal curves in a linear system, 研究集会「第八回　代数曲線論シンポジウム」, 2010.12.11, 埼玉大学.

６．研究組織
(1)研究代表者

春井　岳（HARUI TAKESHI）
大阪大学・理学研究科・研究員
研究者番号：00437336