

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 25 日現在

機関番号：35403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740017

研究課題名(和文)フロベニウス写像による直像の安定性と正標数代数幾何

研究課題名(英文)Stability of direct images by Frobenius morphisms and algebraic geometry in positive characteristic

研究代表者

北臺 如法(Kitadai, Yukinori)

広島工業大学・工学部・助教

研究者番号：30511563

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：正標数の代数多様体上のベクトル束がフロベニウス写像による直像をとることで安定性が保たれるかどうかという問題とそれに関連する問題について研究した。既に得られている曲面の場合の結果で重要な役割を果たした半安定な余接束、あるいは指定回数フロベニウス写像による引き戻しで半安定性が崩れる余接束を持つ多様体を探索し、半安定性とフロベニウス写像との関係をより理解するための計算を進めた。

研究成果の概要(英文)：I studied the problem of whether taking direct images of semistable vector bundles on algebraic varieties in positive characteristic by Frobenius morphisms preserves their semistability or not and related problems. Calculations to find concrete examples of algebraic surfaces whose cotangent bundles are semistable or are not semistable by Frobenius pullback several times were proceeded. In addition, I studied a pseudorandom number generator AST using an Artin-Schreier tower and its properties as an application of algebra in positive characteristic.

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ベクトル束 安定性 半安定ベクトル束 正標数 フロベニウス写像 疑似乱数 有限体 Artin-Schreier拡大

1. 研究開始当初の背景

正標数の代数幾何の大きな特徴は、非分離的な射の存在である。正標数の代数閉体上の代数多様体とその上のベクトル束を考えると、多様体の上には絶対フロベニウス写像(以下、フロベニウス写像)という非分離的な射の典型が存在する。フロベニウス写像によるベクトル束の引き戻しという操作と安定性の関係は、正標数代数幾何学では基本的な問題として考えられてきた。しかし次のように、フロベニウス写像による直像と安定性の関係は、自然な対象にもかかわらず近年になって研究が始まった状態であった。

(1) フロベニウス写像による直像の安定性そのものの問題

Lange と Pauly は、種数が 2 以上の曲線上の場合に、直線束がフロベニウス写像による直像をとる操作によって常に安定ベクトル束になることを示した。これを動機として、研究代表者は、代数多様体上のベクトル束をフロベニウス写像による直像をとる操作で安定性、または半安定性が保たれるか、崩れるのかという自然な問題に取り組み始めた。

上記の Lange と Pauly の自然な高次元化・高階数化として、半安定な余接束を持つある種の曲面上の直線束の場合、あるいは余接束の直線束ひねりの場合への一般化を隅廣秀康氏と共同で研究し、肯定的に解決した。この、曲面への一般化の過程で、フロベニウス写像によるベクトル束の直像そのものではなく、直像をさらにフロベニウス写像により引き戻す操作を加えて考え、その引き戻しの上に標準的フィルタ付けという自然なフィルタ付けを導入し、それに標準接続という古典的な道具を組み合わせることが我々の証明の鍵となり、重要な役割を果たした。

しかし、曲面の場合の結果のさらなる高次元化・高階数化のためには、この標準的フィルタ付けのさらなる深い解析、特に標準的フィルタ付けの次数成分に現れる切り落とし対称テンソル積 (truncated symmetric tensor product) の安定性、すなわち正標数独特のテンソル積と半安定性の関係の解明といった、正標数における半安定性の深い理解が求められていた。

(2) フロベニウス写像による直像と安定性の現象の正標数の代数幾何学への応用

また、上記の曲面の場合への我々の一般化は、正標数一般型代数曲面の地理の問題、正標数における小平消滅定理の問題、de Rham 複体との関係などにも関係することがわかっており、フロベニウス写像によるベクトル束の直像とベクトル束の安定性という問題を通じたこれらの問題への応用や関係の解明が期待されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、フロベニウス写像による直像の安定性を通じて正標数の代数幾何学における新しい知見を得ることである。具体的には、大きく次の 2 つである。

(1) フロベニウス写像による直像の安定性そのものの理解

正標数の代数多様体上のベクトル束がフロベニウス写像による直像をとることで安定性が保たれるかどうかという自然な問題の曲線上の直線束の場合にあたる Lange と Pauly の定理を、曲面上の直線束の場合に一般化した過程で現れた、標準的フィルタ付けをさらに解析することで、この結果のさらなる高次元化・高階数化を得ること、より具体的には、標準的フィルタ付けの解析のために、正標数独特のテンソル積と半安定性の関係をもっと深く知ることである。

(2) フロベニウス写像による直像と安定性の現象の正標数の代数幾何学への応用や例を広げること

フロベニウス写像によるベクトル束の直像の安定性の問題を通して、正標数一般型代数曲面の地理の問題、正標数における小平消滅定理の問題、de Rham 複体との関係といった応用へと問題とその理解を広げていくことである。

また、実際に定理の条件として現れた、半安定な余接束を持つ代数曲面、あるいは、指定した回数フロベニウス写像による引き戻しで半安定性が崩れる余接束を持つ代数曲面の具体的な例を探索し、その現象が起こる条件や背後にある性質は何なのかを知ること、正標数代数幾何の深い理解を得ることである。

3. 研究の方法

(1) 半安定な余接束を持つ正標数の代数曲面・多様体の探索

これまでの研究で標準的フィルタ付けの次数部分に現れる切り落とし対称テンソル積と余接束の半安定性の解析が重要であり、その解析の際に、多様体が半安定な余接束を持つという性質が重要な役割を果たした。

そこで、半安定な余接束を持つ正標数の代数曲面の具体例を調べるために、半安定な余接束、あるいはそのフロベニウス写像による指定回数の引き戻しで半安定性が崩れる余接束を持つ多様体の例を構成するための具体的な計算を曲面の場合で定義通りの方法で行った。ピカール群がわかりやすい曲面を選択し、その上の直線束が余接束あるいはその数回のフロベニウス写像による引き戻しに含まれる条件を計算することにより行った。

(2) 正標数の応用

そのほか、正標数の代数学の応用として、

有限体の Artin-Schreier 拡大の列である Artin-Schreier 塔の上の積構造を利用した疑似乱数生成法 (AST と命名) の研究を行った。これは宋慧玲氏、伊藤浩行氏との共同研究である。

有限体の Artin-Schreier 拡大の理論的な性質からこの疑似乱数の周期と均等分布性といった性質を研究した。

実際にアルゴリズムを C 言語及び C++ 言語により実装し、疑似乱数を生成できるようにし、性質の数値実験・統計的検定ができるようにした。

4. 研究成果

曲面の余接束やそのフロベニウス写像による引き戻しが半安定になるような曲面を上記の方法により探索したが遺憾ながら未だに新しいと呼べる例の構成・発見には至ってはいない。したがって、これについて国内外における位置づけやインパクトについては特筆することは未だ存在していない。しかしながら、今後の展望として、これからさらに時間をかけてピカル群のわかりやすい曲面を探索することにより同じ方法の計算から興味深い例が見つかる可能性があると思われる。また、この方法により、余接束のみならず他の階数 2 のベクトル束についてもその半安定性が計算できるのではないかという感触を得ており、その一般化に向けての計算代数的アルゴリズムの研究の方向にも発展が見込める。この方向の研究についても今後の課題としたい。

また、正標数の代数学の応用としての研究である Artin-Schreier 塔を利用した疑似乱数生成法 AST については、そのアルゴリズムから性質を解析し、また数値実験と TestU01 というパッケージによる統計的検定をまとめて論文として出版した。成果として、この疑似乱数生成法 AST は、一般には予想の段階であるがかなり長い周期を実現できる見込みがあり、また TestU01 によりその疑似乱数としての統計的性質は非常によいことが確かめられた。また、現在の実装ではそのアルゴリズムから生成速度が高速ではないことも確かめられた。有限体上の代数学を利用した疑似乱数生成法としてはメルセンヌ・ツイスタという非常に長周期で均等分布性もよく生成速度も高速な生成法が今日では広く知られ利用されているが、この AST は生成速度のデメリットを除けば新しい疑似乱数生成法の作り方として国内外に一定のインパクトがあるものと考えられる。今後の展望としては、より精密な周期の評価をすることと、疑似乱数としての均等分布次元を正確に計算することにより、疑似乱数としての性質がよいことが解明されることが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

1. 宋慧玲, 伊藤浩行, 北臺如法, A pseudorandom number generator using an Artin-Schreier tower, SUT Journal of Mathematics, 47 巻, (2011) no.1, 73-90, 査読有

[学会発表](計 3 件)

1. 北臺如法, A pseudorandom number generator using an Artin-Schreier tower (a joint work with Song Huiling and Hiroyuki Ito), 愛媛大学代数セミナー, 2014年2月10日(月) 16:30 -- 17:30, 愛媛大学.

2. 北臺如法, A pseudorandom number generator using an Artin-Schreier tower (a joint work with Song Huiling and Hiroyuki Ito), 研究会「射影多様体の幾何とその周辺 2012」(高知研究会), 2012年10月7日(日) 11:00--12:00, 高知大学.

3. 北臺如法, A pseudorandom number generator using an Artin-Schreier tower (a joint work with Song Huiling and Hiroyuki Ito), Workshop on Galois point and related topics, 2012年9月16日(日) 13:50-14:40, 山形大学理学部 1号館 1階 13番教室.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北臺 如法 (KITADAI YUKINORI)

広島工業大学・工学部・助教

研究者番号：30511563

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：