様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月１２日現在

機関番号：32503
研究種目：若手研究(B)
研究期間： 2010～2012
課題番号：22740022
研究課題名（和文）放物型概均質ベクトル空間と表現論との関連
研究課題名（英文）Relations between prehomogeneous vector spaces of parabolic type and representation theory

研究代表者
杉山　和成（SUGIYAMA KAZUNARI）
千葉工業大学・情報科学部・准教授
研究者番号：90375395

研究成果の概要（和文）：A 型の箙に付随する概均質ベクトル空間の相対不変式の b-関数についての研究（論文）を完成（執筆）した。この論文の結果を応用して、特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間の関数等式についていくつか計算した。また、鈴木利明氏により定義された保型超関数の L 関数について研究した。その結果、１次元の概均質ベクトル空間の場合について保型超関数の L 関数がみたす関数等式と、マース波動形式の L 関数がみたす関数等式と一致することが確認された。また、保型超関数に関する逆定理を定式化し、これとポアソン変換を組み合わせてマース波動形式に関する逆定理の新しい観点からの証明を得た。

研究成果の概要（英文）：We have completed the work on b-functions associated quivers of type A, and published a paper in a journal. Applying a result in the paper, we have obtained some results on functional equations of prehomogeneous vector spaces of parabolic type arising from special linear Lie algebras. Moreover, we have studied the L-functions associated with automorphic distributions defined by Toshiaki Suzuki. As a result, we have observed that the functional equation satisfied by the L-functions associated with automorphic distribution coincides with that satisfied by the L-functions associated with Maass wave forms. Furthemore, we have formulated a converse theorem for automorphic distributions, and combining this with Poisson transforms, we have obtained another proof for the converse theorem for Maass wave forms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	８００，０００	２４０，０００	１０４０，０００
２０１１年度	７００，０００	２１０，０００	９１０，０００
２０１２年度	５００，０００	１５０，０００	６５０，０００
年度			
年度			
総　計	２０００，０００	６００，０００	２６００，０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：概均質ベクトル空間

１．研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間とは、稠密な軌道を持

つ（非常に大きな群の作用を受けている）ベクトル空間のことであるが、佐藤幹夫・新谷卓郎の理論（Ann. of Math. 100 (1974)）により、概均質ベクトル空間の相対不変式を用いて関数等式をみたすゼータ関数が構成できる。概均質ベクトル空間の例は非常に豊富にあり、例えば、表現が既約な概均質ベクトル空間については、佐藤幹夫・木村達雄（Nagoya Math. J. 65 (1977)）により分類されている。また一般に、次数つきリー環から概均質ベクトル空間が構成される（このようなタイプの空間を放物型概均質ベクトル空間という）。概均質ベクトル空間の理論の特徴は、これらのゼータ関数を調べるときに、代数解析（超局所解析）の手法を用いることができるという点である。例えば、概均質ゼータ関数の極の情報は b-関数という不変量を計算することによりある程度得られるが、b-関数の計算をする超局所計算法というのが知られており、この方法により、最も基本的なクラスである既約正則概均質ベクトル空間の b-関数が計算された。

ところが、概均質ベクトル空間の b-関数や関数等式については、個々の場合に具体的に計算されてはいても、統一的な公式はまだ存在しない。そのような公式の発見のための準備として、概均質ベクトル空間の b-関数や関数等式などの不変量について、表現論的な意味づけを明確にすることが求められていた。そのような研究の出発点としては、放物型概均質ベクトル空間について研究することが重要であると考えられる。例えば、可換放物型概均質ベクトル空間の場合には、b-関数や関数等式を、埋め込まれているリー環のルート系やウェイトなどに関する表現論的なデータを使って表現する、というようなことができている。（可換でない場合は、b-関数や関数等式の計算は、行列の計算に持ち込んでケースバイケースで実行されている）。そこで、放物型概均質ベクトル空間の研究を基盤として、b-関数や関数等式などの不変量の表現論な意味づけをより明確にするというのは自然な目標である。

２．研究の目的

概均質ベクトル空間の b-関数や関数等式について、より統一的な公式を追求する。概均質ベクトル空間の中でも重要なクラスである放物型概均質ベクトル空間について、b-関数や関数等式について、表現論とのかかわりを明確にする。また、概均質ベクトル空間のゼータ関数と、保型形式の L-関数との関連について表現論的な観点から関連を考える。

３．研究の方法

より多くの（放物型）概均質ベクトル空間について b-関数や関数等式を計算し、その結果を統一的な形にまとめ上げることを試みる。放物型概均質ベクトル空間の軌道構造について、ルート系やウェイトなどを用いた表示を調べて、その結果から b-関数などについての一般的な表示が得られるかどうかを検討する。概均質ゼータ関数と保型 L-関数との関連については、鈴木利明氏による保型超関数を用いて調べる。

４．研究成果

（１）次元ベクトルを固定し A 型のクイバーの表現全体を考えると同型類は有限個になるので，それに対応して有限個の軌道を持つ概均質ベクトル空間が現れる。このような概均質ベクトル空間のクラスは、特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間のクラスを含み、表現論や幾何学的不変式論の立場から古くからも研究されてきた。 今回，これらの相対不変式の 1-変数 b-関数を b-関数の分解公式（佐藤文広・杉山和成、Inter. J.Math. 2006）を用いて計算した。さらに、この空間に付随する多変数の b-関数を決定するアルゴリズムを発見した。 研究を開始した時点の見込みでは，向きが任意の場合には相対不変式の現れ方が非常に複雑になり、個々の例を取り扱うことはできるにしても計算結果を一般的に記述するのはきわめて困難ではないかという感触を持っていた。しかし多くの実例の計算を繰り返すことにより、計算結果はグラフを用いてきわめて簡便に記述できるということか分かった。これらの結果の概略については数年前に得られていたが、証明を書き上げるのがなかなか大変で論文の執筆に時間がかかっていたが、本研究期間中に論文を発表することができた。

(2) また、(1)の研究結果を用いて、特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間の関数等式を計算する新しい方法を考案した。この新しい方法を用いれば、指数関数や三角関数を含む連立一次方程式を解くだけで関数等式が計算でき、一般的な結果を得ることが期待できる。

(3) 放物型概均質ベクトル空間の理論の実解析的保型形式の研究への応用を考察した。放物型概均質ベクトル空間は、対称空間の境界にあたるものと考えられる。そこで、保型

形式の「境界値」にあたるものが、放物型概均質ベクトル空間の上に定義できるが、これは「保型超関数」と呼ばれるものになる。(概均質ベクトル空間の保型超関数の理論は、対称行列の空間の場合に、鈴木利明氏により研究された。)保型超関数は、フーリエ展開を持ち、離散群の作用に対しある種の不変性をみたす。その不変性を利用すると、保型超関数のフーリエ係数から構成されるエル関数が関数等式をみたすことが証明できる。以上が鈴木氏の結果であるが、一方で、概均質ベクトル空間の理論を用いると、関数等式をみたすゼータ関数が構成できる。本研究では、このゼータ関数を逆メラン変換することにより保型超関数を逆に構成すること、および、その保型超関数のポアソン変換像の研究を目標とした。ポアソン変換を用いると、境界値から対称空間上の関数が定まるので、この研究により実解析的保型形式が構成できることが期待される。そこで最も基本的な１次元の概均質ベクトル空間の場合について以上のプログラムを実行した。その結果、保型超関数のＬ関数がみたす関数等式が、マース波動形式のＬ関数がみたす関数等式と一致することが確認された。そこで、1 次元の概均質ベクトル空間上に定義された保型超関数からマース波動形式を構成する道筋が出来上がった。我々は、保型超関数に関する「逆定理」を定式化し、これとポアソン変換を組み合わせてマース波動形式に関する「逆定理」の新しい観点からの証明を得た。保型超関数の例として、アイゼンシュタイン超関数から構成される保型超関数というものがあるが、この場合に実際にポアソン変換を計算したところ、通常の実解析的アイゼンシュタイン級数になることが確かめられた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① <u>Kazunari Sugiyama</u>, A note on functional equations of prehomogeneous vector spaces of parabolic type arising from special linear Lie algebras, Josai Mathematical Monographs, 査読無, Vol. 6, 81-92, 2013。

② <u>Kazunari Sugiyama</u>, b-Functions and the representation theory of quivers, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B36, 1-16, 2012。

③ <u>Kazunari Sugiyama</u>, b-Functions associated with quivers of type A, Transformation Groups, 査読有, 16 巻, 1183-1222, 2011。

④ <u>杉山和成</u>, 特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間のフーリエ変換について、2010 年度表現論シンポジウム報告集, 査読無, 105-113, 2010。

〔学会発表〕（計４件）

① <u>杉山和成</u>、SL(2,R)の保型形式に付随するL-関数, 城西大学大学院数学専攻ワークショップ, 2012 年 9 月 15 日, 城西大学紀尾井町キャンパス。

② <u>杉山和成</u>, 保型超関数と概均質ベクトル空間のゼータ関数, 概均質ベクトル空間研究集会, 2012 年 1 月 28 日, つくば国際会議場。

③ <u>杉山和成</u>, 特殊線形リー環から現れる放物型概均質ベクトル空間のフーリエ変換について, 2010 年度表現論シンポジウム, 2010 年 11 月 11 日、伊豆おおとり荘。

④ <u>Kazunari Sugiyama</u>, Local zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces of parabolic type arising from special linear Lie algebras, 研究集会「仙台整数論研究集会」,2010 年 10 月 9 日、東北大学。

〔図書〕（計　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

　杉山　和成（SUGIYAMA KAZUNARI）

　千葉工業大学・情報科学部・准教授

　研究者番号：９０３７５３９５

(2)研究分担者

　　　　　　（　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者

　　　　　　（　　）

　研究者番号：