

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22740025

研究課題名(和文)有限群のブロックの加群の圏及びその導来圏の同値について

研究課題名(英文)On equivalences for module categories and their derived categories for blocks of finite groups

研究代表者

功刀 直子(KUNUGI, Naoko)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：50362306

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文):有限群のモジュラー表現における重要な問題の一つにブルエの可換不足群予想がある。共通の可換シロー部分群をもち同じp局所構造をもつ二つの有限群の主ブロックは導来同値だろうという予想である。この予想の解決には、局所部分群の導来同値を張り合わせて安定同値を得る方法と安定同値を導来同値へ持ち上げる方法を発展させることが重要である。本研究では、導来同値の張り合わせに関連して可換バーテックスをもつスコット加群のブラウアー直既約性についての結果を得、さらにそれを非可換バーテックスの場合へ一般化した。これらの結果を非可換不足群をもつ無限系列の有限群のブロックの森田・導来同値類分類に応用できないか探った。

研究成果の概要(英文):One of the important conjectures in modular representation theory of finite groups is Broue's abelian defect group conjecture. It states that the principal blocks of two finite groups having a common abelian Sylow subgroup and the same fusion systems on the Sylow subgroup should be derived equivalent. To solve the conjecture it is important to develop the way of gluing local derived equivalences to global stable equivalences and of lifting stable equivalences to derived equivalences. In this project, related to gluing processes I obtained a result for Brauer indecomposability of Scott modules with abelian vertex, and then generalize this result to non-abelian vertex case. I also tried to apply these results to obtain new examples of derived equivalences with non-abelian defect groups and Morita equivalences for infinite series of finite groups.

研究分野：代数学

キーワード：有限群 モジュラー表現 ブロック 森田同値 導来同値 安定同値

1. 研究開始当初の背景

有限群のモジュラー表現における問題は主に、与えられた有限群の素数 p に関する表現の情報は p 局所部分群の表現の情報から得られるのではないかと、という考えに基づいている。つまり p 局所構造が同じ 2 つの有限群のブロックでは、表現論的な情報が保たれるのではないかと考えられ、とくに加群の圏やその導来圏の関係について調べることが重要である。とくにブルエは、2 つの有限群が同じ可換シロー p 部分群をもち p 局所構造が一致するとき、2 つの主ブロックは導来同値だろうという予想(可換不足群予想)を提出した。可換不足群予想の研究は、シロー群の p -ランクが小さい場合から研究が進められ、ランク 2 が部分的に解決されている段階である。また、可換不足群予想の解決のためには非可換不足群をもつブロックについての考察も重要である。実際、シロー p 部分群の可換性の条件をはずすと予想が成り立たない例が知られるが、例えば有限体上の一般線型群などの無限系列内の 2 つ群の場合、非可換シロー p 部分群をもつ場合でも、より強く森田同値が存在するのではないかと考えられている。これはまた、与えられた有限 p 群を不足群にもつブロックの森田同値類は有限個だろうと予想したドノバン予想とも関係し重要である。無限系列での森田同値については多くの研究者が興味をもっているにもかかわらず、可換不足群をもつ場合にいくつかの検証例があるのみで、非可換ではほとんどないため、具体例の検証を行うなど考察を進めるべき状況であった。

2. 研究の目的

上記背景を踏まえ、可換とは限らないシロー部分群をもち p 局所構造を共有する 2 つの有限群について、主ブロック間の導来同値・森田同値を構成する手法を開発し、とくに非可換不足群をもつ一般線型群や関連する無限系列の群について森田同値類分類に応用することを研究の目的とする。具体的には、以下の研究を行う。

- (1) p 局所部分群間の導来同値を張り合わせることで安定同値を構成するために、置換加群の直既約因子のブラウアー直既約性、とくにスコット加群のブラウアー直既約性について考察する。
- (2) 安定同値を持ち上げて導来同値を構成する手法をより扱いやすいものにするために、単純加群の Green 対応子の特徴づけを行う手法を開発する。
- (3) 同じサイズで同じ p 局所構造をもつ一般線型群の無限系列や関連する無限系列の

有限群について、上記研究を主ブロック間での森田同値の構成に応用する。

3. 研究の方法

有限群、代数群、多元環の表現論の手法を組み合わせ、具体的には以下のような方法で研究をする。

- (1) 有限群の表現論の議論を用いて、置換加群の直既約因子のブラウアー直既約性についての研究を行う。とくに置換加群の直既約因子として重要であるスコット加群のブラウアー直既約性を考察する。より扱いやすい可換なバーテックスをもつ場合を考察したあと、非可換なバーテックスをもつものについて位数が小さく可換にちかい場合について考察をし、それを利用して一般論を導き出す。
- (2) 有限群の表現論の議論を用いて、単純加群の Green 対応子の特徴づけについて研究する。自明なソースをもつ加群による特徴づけを行うことをめざす。
- (3) 導来同値・森田同値の構成法を開発に対しては、(1)(2)の研究結果と多元環の表現論において発展している導来同値・森田同値構成法を組み合わせることにより、具体的な群について検証をし、データとして蓄積する。さらにそれを考察することで一般論を導き出す。
- (4) (1)(2)(3)の研究を一般線型群および関連する無限系列の群の森田同値類分類へ応用する。可換シロー部分群の場合、同じサイズをもち同じ p 局所構造をもつ一般線型群では系列内の森田同値がすでに得られているため、それを利用して非可換シロー部分群の場合の森田同値分類を進める。

4. 研究成果

以下のような研究成果を得ることができた。

- (1) スコット加群のブラウアー直既約性についての考察を行った。とくに可換なバーテックスをもつスコット加群がブラウアー直既約性をもつことと、そのバーテックス上のフュージョン・システムが saturated であることが同値であることを示し、Radha Kessar, 三橋尚文らとの共著論文にまとめ発表した。また、バーテックスが可換とは限らない場合についても考察し、スコット加群がブラウアー直既約となるための必要十分条件を局所部分群のスコット加群についての条件で与え、さらにその条件を満たすための群論的な条件を研究協力者とともに与えた。

スコット加群のブラウアー直既約性は、主ブロック間の安定同値を、局所部分群のブロックの導来同値の張り合わせを用いて構成する際に重要となる概念である。主ブロック間の森田同値や導来同値は安定同値を持ち上げることで得られることが多く、ここで得られた成果は森田同値・導来同値構成のために重要な結果であると考えられる。

- (2) 巡回シロー部分群をもつ群を拡大して得られる非可換メタ巡回群をシロー部分群にもつ群の主ブロックについて考察をした。とくにこの設定となる3次射影特殊線形群の指数3での拡大を扱い、局所部分群の主ブロックとの間での指標に関するブルエ予想(パーフェクト・アイソメトリーについての予想)を確認した。さらにより強く導来同値が成立するかどうかの検証にむけて、単純加群のGreen対応子について考察を行い、自明なソースをもつ加群を用いてGreen対応子の特徴づけを行った。とくに、無限系列で現れるこれらの群の主ブロックの単純加群のGreen対応子がすべて同じ特徴づけでえられることを確認した。非可換不足群をもつブロックでは直既約射影加群の構造が複雑になるためGreen対応子のLoewy列を求めることは困難であるが、自明なソースをもつ加群による特徴づけが得られたことは、安定同値の像を計算し導来同値へ持ち上げるためのステップとして重要である。さらに系列内ですべて同じ特徴づけであったことは、これらの主ブロックが森田同値になることの検証へむけての重要な結果であると考えられる。
- (3) 非可換シロー p 部分群をもつ一般線型群の主ブロックの森田同値類分類について、表現を考える体の標数が奇素数で群を定義する有限体の乗法群の位数を割り、ワイル群が巡回シロー p 部分群を持つ場合、同じサイズの2つの一般線型群の主ブロックは森田同値であることを部分的に宮地兵衛、奥山哲郎との共同研究で得ていたが、それらの結果を国際研究集会で発表するとともに、より一般的な設定で森田同値の存在が示せないか考察をつづけた。また、標数が2の場合の2次一般線型群の系列に関する研究をすすめることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

宇野勝博、功刀直子: "有限群のモジュラー表現論における予想について" 数学

65. 1-23 (2013), (査読有)

功刀直子, Fusion system と Scott 加群の Brauer 直既約性, 京都大学数理解析研究所講究録, 1784 巻, 17-20 (2012) (査読無)

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1784-03.pdf>

Radha Kessar, Naoko Kunugi, Naofumi Mitsuhashi, On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules. J. Algebra 340 (2011), 90-103 (査読有)

DOI:10.1016/j.jalgebra.2011.04.029

Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups. Math. Z. 265 (2010), no. 1, 161-172 (査読有)

DOI:10.1007/s00209-009-0508-9

Miles Holloway, Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p , Archiv der Mathematik, Arch. Math. (Basel) 94 (2010), no. 2, 101-116. (査読有) DOI: 10.1007/s00013-009-0075-7

Naoko Kunugi, Morita equivalent blocks of general linear groups in non-defining characteristic, 京都大学数理解析研究所講究録 1687 巻, 164 - 166 (2010) (査読無), <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1687-20.pdf>

Naoko Kunugi, Morita equivalences for principal blocks of general linear groups, 京都大学数理解析研究所講究録, 1679 巻, 71 - 74 (2010) (査読無), <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1679-12.pdf>

[学会発表](計5件)

石岡大樹, 功刀直子, Scott 加群の Brauer 直既約性, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 23 日, 明治大学(東京都千代田区)

功刀直子, Fusion system と Scott 加群の Brauer 直既約性, RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」, 2011 年 8 月 29 日 京都大学数理解析研究所(京都市)

Naoko Kunugi, Scott modules and Morita

equivalences for principal blocks of finite groups, Workshop “Global/local conjectures in representation theory of finite groups”, 2011年3月17日, Banff International Research Station(Banff, Canada)

越谷重夫, 功刀直子, Miles Holloway, 素数指数の巡回部分群をもつ非可換群が不足群である有限群のブロック, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学(名古屋市)

功刀直子, スコット加群のブラウアー直既約性について, 第22回有限群論草津セミナー, 2010年8月1日 草津セミナーハウス(群馬県吾妻郡草津町)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

功刀 直子 (KUNUGI, Naoko)

東京理科大学・理学部第一部・准教授

研究者番号: 50362306