

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 15 日現在

機関番号：13101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740028

研究課題名(和文) 構成的ガロア逆問題の研究

研究課題名(英文) A study on constructive inverse Galois problem

研究代表者

星 明考(Hoshi, Akinari)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：50434262

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円、(間接経費) 720,000円

研究成果の概要(和文)：エヴァリスト・ガロアによって創始されたガロア理論は、現代代数学の土台を成し、数学の最先端における発展を支え続けている。ガロア理論における、「任意の有限群が体の拡大のガロア群として出現するだろうか？」というガロア逆問題は、数論において興味深い対象の一つである絶対ガロア群の構造と関係している。当研究では、ガロア逆問題に関する研究を行い、いくつかのネーター問題、生成的多項式の同型問題などを解決した。これを応用して、いくつかのThue方程式の解を決定した。

研究成果の概要(英文)：Galois theory, forms the foundation of modern algebra, founded by Evariste Galois has continued to support the development of state-of-the-art mathematics. In Galois theory, the problem "whether every finite group appears as the Galois group of some field extension or not" is called inverse Galois problem, and is related to the structure of the absolute Galois group of rationals which is an interesting subject in number theory. In this research, we gave answers to some problems, e.g. Noether's problem, the field isomorphism problem of generic polynomials, which are related to the inverse Galois problem. By applying this, we also solved some Thue equations.

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ガロア逆問題 ネーター問題 有理性問題 双有理分類 不分岐ブラウアー群 安定有理性 レトラクト有理性 Thue方程式

1. 研究開始当初の背景

代数方程式の解法は、古来からの数学における重要なテーマであり、エヴァリスタ・ガロアによって創始されたガロア理論は、現代代数学の土台を成し、数学の最先端における発展を支え続けている。特に近年は、理論的研究に加え、計算代数の発展によってガロア群の計算アルゴリズムが種々のソフトウェアに実装され、具体的な応用が期待できる状況となっている。ガロア逆問題は「任意の有限群 G が体 k の拡大 L/k のガロア群として出現するだろうか？」という自然な問いかけを指しており、有理数体 Q 上において未解決である。 Q 上の絶対ガロア群は、数論における最も興味深い対象の 1 つであり、同問題は「任意の有限群が絶対ガロア群の商群として出現するだろうか？」と言い換えられる。ガロア逆問題における最終段階の課題、与えられた有限群 G をガロア群とする体 k 上の拡大体 (G -拡大体)「全体の構造の把握」及び「その具体的な構成」に関する研究を行う。従来からの代数学・数論における理論的研究を土台とし、計算代数による計算的手法を導入することによって、「生成的多項式」を通じてそれらの具体的な構成を実現する。その 1 つの応用として、生成的多項式の「同型問題」の解から、付随する Thue 方程式族の整数解が得られることが分かってきた。

2. 研究の目的

ガロア逆問題が、ガロア群が G となる体の拡大 (G -拡大) の「存在のみ」を問うているのに対し、本研究は、その拡張として最終段階の課題である「 G -拡大全体の構造」の把握、及び「その具体的な構成」に対して、特に体 k 上の G -拡大全体を係数の変数の特殊化 (t_1, \dots, t_n) (a_1, \dots, a_n) k^n によってカバールする生成的多項式 $g(t_1, \dots, t_n; X)$ $k(t_1, \dots, t_n)[X]$ を用いてその研究を行う。生成的多項式の構成によって、ヒルベルト体 (Hilbert 既約性定理が成立する代数体等) 上では、 G -拡大が無限に存在する事が保証され、 G に対するガロア逆問題もまた自動的に解決される。生成的多項式の具体的な構成、及び生成的多項式に対する部分体 (同型) 問題「生成的多項式の異なる変数への特殊化は、いつ一方が他方の最小分解体の部分体 (と同じ体) を与えるか」に対する必要十分条件を与え、「 G -拡大全体の構造」の把握を目指す。

3. 研究の方法

研究目的達成への最初のステップとしてネーター問題の肯定的解決による生成的多項式の構成が挙げられる。体 k 上のネーター問題とは、 n 変数有理関数体 $K:=k(x_1, \dots, x_n)$ と置換群 $G \subset S_n$ の作用による G -不変体 K^G に対し「 K^G は再び n 変数有理関数体と同型

(純超越的)か？」を問うものである。同問題の肯定解によって、超越基底 $K^G=k(t_1, \dots, t_n)$ を用いて G -拡大 K/K^G を与える生成的多項式 $g(t_1, \dots, t_n; X)$ $k(t_1, \dots, t_n)[X]$ が構成できる。従来の置換作用によるネーター問題をより低次元の場合に帰着させたときの G -作用、あるいは G の正規部分群 H に対する不変体 K^H への G -作用に関する研究は、ネーター問題の肯定的解決及び生成的多項式の具体的な構成に有効である。計算代数・不変式論を用いたネーター問題の肯定的解決による生成的多項式の具体的な構成を行い、得られた生成的多項式が異なる変数の特殊化によって、いつ同じ最小分解体を持つか (=同型問題)、いつ一方の最小分解体が他方の最小分解体の部分体となるか (=部分体問題) を研究し、その必要十分条件を具体的に (応用が可能な形で) 与える。特に、個々の場合に対して得られた同型問題の解を付随する Thue 方程式族の整数解決定に応用することを試みる。

4. 研究成果

(1) Ming-chang Kang 氏 (国立台湾大学)、Boris E. Kunyavskii 氏 (Bar-Ilan 大学) との共同研究として、代数閉体上の p 群 G に対するネーター問題の研究を、不分岐 Brauer 群 $B_0(G)$ を通じて行った。これまで G の位数が p の 4 乗以下の場合には、有理関数体の G の置換作用による不変体 $k(G)$ は有理的、したがって $B_0(G)$ は自明となることが知られていた。我々は、以下を示した： G を奇素数 p に対する位数 p の 5 乗の群とする。このとき、 $B_0(G)$ が非自明であるための必要十分条件は、 G が 10 番目の isoclinism family に属することである。なお、この定理の証明の考察から論文中で提起した、 G_1 と G_2 が isoclinic であれば、不変体 $k(G_1)$ と $k(G_2)$ は安定同型だろうか？ という予想 (Question 1.11) は、その後、Fedor Bogomolov と Christian Boehning によって肯定的に解決された (2013)。

(2) すでに得られていた 3 次の場合を拡張し、同型問題の解の応用として、定数項が ± 1 でその根が単数をなす単純巡回多項式族に付随する 6 次 Thue 方程式族の整数解を考察した。その結果、非自明な分解体の一致が起こらないことを示し、6 次の場合には非自明解が全く存在しないことを証明した。

(3) 三宅克哉氏 (早稲田大学) との共同研究によって既に得られていた Shanks's simplest cubic fields に対する同型問題の解が、付随する 3 次 Thue 方程式族の解の決定に応用できることを示し、その解を決定した。特に、異なるパラメータに対する最小分解体の一致と付随する Thue 方程式族の非自明解の間には 1 対 3 の対応があることを示

し、その対応を明示的に与えた。この対応を岡崎龍太郎氏(同志社大学)が既に得ていた、最小分解体の一致定理に適用することで、付随する Thue 方程式族の非自明解 66 個を与えた。

(4) 北山秀隆氏(大阪大学)、山崎愛一氏(京都大学)との共同研究として、有限群の有理関数体への単項式作用による不変体の有理性に関する研究を行った。2次元の場合は有理的であることが Hajja (1987) によって示され、3次元の場合も純単項式作用と呼ばれる特殊な状況下では有理的であることが、Hajja-Kang (1994)、Hoshi-Rikuna (2008) によって示されていた。また、代数閉体上では Kang-Prokhorov (2010) による結果等があった。我々は、一般の単項式作用に対して、3次元の場合に標数が2とは異なる一般の体上で、1つの例外を除いて有理性の問題を解決し、双有理分類を得た。これらの結果は、4次元単項的線形作用による不変体の有理性問題に応用可能である。実際、Rikuna (2004)、Plans (2007) が与えた、 $SL(2,3)$ 、 $GL(2,3)$ の作用による不変体は有理的である、という結果に対する別証が得られた。

(5) 生成的多項式の具体的構成のため、(一般)ネーター問題「 n 変数有理関数体への有限群 G の作用による不変体は K 上純超越的か？」に関する研究を行った。Ming-chang Kang 氏(国立台湾大学)との共同研究として、捩れ対称群作用と呼ばれる単項式作用に着目し、不変体の純超越性を n が 3, 4, 5 の場合に示した。

(6) ガロア群が可解群である5次の生成的多項式に対して、同型問題「パラメータの異なる特殊化による分解体がいつ一致するか」及び共通部分問題「パラメータの異なる特殊化による分解体の共通部分を求めよ」の解を、多重分解多項式の分解のタイプを用いることによって与えた。この成果は三宅克哉氏(早稲田大学)との共著論文として発表された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

星 明考、Ming-chang Kang、Boris E. Kunyavskii、Noether's problem and unramified Brauer groups、Asian Journal of Mathematics、査読有、Vol. 17、2013、pp.689 - 714、DOI: 10.4310/AJM.2013.v17.n4.a8

星 明考、On the simplest sextic fields and related Thue equations、査読有、Vol. 47、2012、pp.35 - 49、DOI:

10.7169/facm/2012.47.1.3

星 明考、On correspondence between solutions of a family of cubic Thue equations and isomorphism classes of the simplest cubic fields、査読有、Vol. 131、2011、pp.2135 - 2150、DOI: 10.1016/j.jnt.2011.05.001

星 明考、北山 秀隆、山崎 愛一、Rationality problem of three-dimensional monomial group actions、査読有、Vol. 341、2011、pp.45 - 108、DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.06.004

星 明考、Ming-chang Kang、Twisted symmetric group actions、Pacific Journal of Mathematics、査読有、Vol. 248、2010、pp.285 - 304、DOI: 10.2140/pjm.2010.248.285

星 明考、三宅 克哉、On the field intersection problem of solvable quintic generic polynomials、International Journal of Number Theory、査読有、Vol. 6、2010、pp.1047 - 1081、DOI: 10.1142/S179304211000337X

[学会発表](計 7 件)

星 明考、山崎 愛一、Krull-Schmidt theorem fails for dimension 5、日本数学会、2013年3月23日、京都大学

星 明考、山崎 愛一、Rationality problem for algebraic tori、日本数学会、2012年9月19日、九州大学

星 明考、Ming-chang Kang、Boris E. Kunyavskii、Noether's problem and unramified Brauer groups、日本数学会、2012年9月19日、九州大学

星 明考、Ming-chang Kang、北山 秀隆、Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems、日本数学会、2012年3月26日、東京理科大学

星 明考、Ming-chang Kang、Unramified Brauer groups for groups of order p^5 、日本数学会、2012年3月26日、東京理科大学

星 明考、On the simplest sextic fields and related Thue equations、日本数学会、2010年9月25日、名古屋大学

星 明考、On the simplest cubic fields and related Thue equations、日本数学会、2010年9月25日、名古屋大学

[その他]

ホームページ等

<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/>

5. 研究組織

(1)研究代表者

星 明考 (HOSHI, Akinari)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：5 0 4 3 4 2 6 2