

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月31日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2011

課題番号：22740029

研究課題名（和文） 強可視的作用の立場からの非対称な球多様体の幾何構造の研究

研究課題名（英文） Geometric structures of non-symmetric spherical manifolds by strongly visible actions

研究代表者

笹木 集夢 (ATSUMU SASAKI)

東海大学・理学部・講師

研究者番号：60514453

研究成果の概要（和文）：複素半単純リー群の非対称な球複素等質空間に対して強可視的作用の視点から研究を行った。本研究課題では、既約なアフィン球等質空間のうち、4対称空間とケーリー型球等質空間の1つ、準アフィン球等質空間のうち複素半単純リー環における複素球冪零軌道に対して、強可視的作用を持つことを証明した。さらに、この強可視的作用における各軌道と交叉するスライスを具体的に与えた。

研究成果の概要（英文）：We study non-symmetric spherical homogeneous spaces of complex semisimple Lie groups by strongly visible actions. We treat spherical and 4-symmetric space and a certain Cayley-type spherical variety which are irreducible affine homogeneous spaces and spherical complex nilpotent orbits in a complex semisimple Lie algebra which are quasi-affine. Further, we give a concrete description of a slice which meets every orbit.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群の表現論・複素多様体、無重複表現、可視的作用、カルタン分解の一般化、球等質空間

1. 研究開始当初の背景

複素多様体における可視的作用という概念は2004年に小林俊行によって提唱された。可視的作用の概念は、複素多様体上の正則ベクトル束において、正則切断のなす空間に実現される表現が無重複であるための、底空間における幾何的十分条件として導入された（無重複性の伝播定理）。無重複表現の例はこれまでに散在的に発見されてきたが、この定理によって、有限次元表現のみならず連続

スペクトルを含む無限次元表現に対しても、広い範囲で無重複表現を統一的な説明を与える、という理論が進展している。

可視的作用自身の研究も近年行われている。小林は、強可視的作用の定義を提唱した論文において様々な具体例を提示した。また、エルミート対称空間やA型旗多様体を強可視的作用の視点から研究を行った。研究代表者は、線型空間に対する研究を行い、複素簡約リー群のコンパクト実型が線型空間に可

視的に作用するための必要十分条件として、線型空間上の多項式環に自然に誘導される表現が無重複性であることを証明した。この結果は、表現論における無重複性と複素多様体における可視的作用という2つの異なる概念が、線型空間の場合に同値であることを表している。一方、対称とは限らない等質空間や、より一般に等質空間でない複素多様体に対しても、無重複表現を背景にもつクラスに対しては、線型空間の場合と同様に可視的作用が存在し、表現論との深い関係が存在するものと期待される。

強可視的作用において、この作用における各軌道と交叉する部分多様体（これをスライスとよぶ）を研究することは興味深い。特に、スライスの具体的記述方法を与えること、また幾何構造を研究することが重要な問題と考えられる。この問題に対し、対称空間の場合は古典的なカルタン分解によって解決される。線型空間の場合は、空間によって構成方法は異なるものの具体的にスライスを与えた。一方、これらのいわゆる平坦な空間とは異なり、非対称な等質空間の場合は一部の例を除き一般論はほとんど知られていない。表現論を背景に持つ等質空間に対する上述の予想は、空間の幾何構造を群の作用によるスライスの視点から研究する第一歩となる。

強可視的作用におけるスライスを研究するもう1つの理由として、スライスと表現の既約分解との関係が挙げられる。線型空間や対称空間の場合、スライスとして、空間の上の関数空間に定まる表現の既約分解におけるサポートの階数とスライスの次元が一致するようなものを選ぶことができることが明らかになっている。この結果は、他の多様体においても成り立つと予想されている。

2. 研究の目的

線型空間における研究の次のステップとして、複素半単純リー群の球等質空間に対して可視的作用の視点から研究を行う。

半単純複素対称空間は球等質空間である。一方、半単純複素対称空間における半単純対称対の作用は強可視的である。本研究課題では、非対称な場合を研究し、コンパクト実型の作用が強可視的かどうかを判定するとともに、各軌道と交叉するスライスを具体的に記述することを目指す。また、スライスの構成法に関する一般論の構築を通して球多様体の幾何構造を模索する。

複素等質空間が球多様体であるとき、その上の関数空間に誘導される表現が無重複である。本研究が肯定的に解決されると、既約なアフィン等質空間に対して、可視的作用と無重複表現との同値性が明らかになり、線型空間と同様の結果を得る。

3. 研究の方法

無重複性の伝播定理によって、複素等質空間上の関数空間に自然に定義される表現が無重複ではないとき、強可視的作用ではないため、本研究課題は表現論を背景にもつ等質空間に対して行う。

アフィン球複素等質空間は Krämer, Brion, Mikityuk によって分類が与えられた。非対称かつ既約なものは、非管状型エルミート対称空間の複素化上の複素直線束が3種類、定曲率の球等質空間が2種類、ケーリー型と呼ばれるクラスが3種類、4対称空間（および4対称空間と中心の直積）が4種類の計12種類に分類されている。本研究はこの分類に沿って遂行する。

強可視的作用における先行研究を鑑みると、次の方法が有効であると考えられる。

- (1) カルタン分解の一般化と編み上げの手法。これまでに発見された強可視的作用の多くは、スライスを構成する際に群の構造定理や分解定理が重要な役割を果たす。コンパクトリー群のカルタン分解は Hoogenboom や松木敏彦によって理論が整備された。非コンパクト簡約リー群の古典的なカルタン分解の拡張として、Flensted-Jensen は対称空間に対するカルタン分解を与えた。近年、非対称な等質空間に対する研究も行われている。小林はA型旗多様体における可視的作用の研究において、いくつかの対称空間のカルタン分解を準備しそれらを「編み上げる」という方法を提唱した。この方法が効果的と考えられるのは、非管状型エルミート対称空間の複素化を底空間とする複素直線束は非対称な球シュタイン多様体や4対称空間の1つに対して実際に適用し、カルタン分解の一般化を与え、強可視的作用をもつことを証明したことによる。他の4対称空間や既約でないアフィン球等質空間に対しても、編み上げによる手法を用いてカルタン分解の一般化を考察し、群作用におけるスライスの構成を行う。これにより、強可視的であることを証明する。
- (2) 線型空間に実現して証明する方法。定曲率の球等質空間として、複素線型空間内の複素球面や複素射影空間が知られている。これらの空間における群作用は複素線型空間の標準座標を用いて行列計算によって考察可能であるという点で有効である。実際に、 G_2 型例外単純リー群の3次特殊複素直交群 $SL(3, \mathbb{C})$ による商空間は7次元複素球面と双正則同相であることから、強可視性を証明することができる。3種類のケーリー型球等質空間もある線型空間の領域として実現可能であることを証明し、具体的に群作

用による軌道を記述することで強可視的であることを証明を与える。

複素単純リー環における冪零軌道を可視的作用の視点から研究を、A型の場合に小林によって行われた研究手法を適用して行う。冪零軌道は、グラスマン多様体におけるハミルトン作用のモーメント写像の像（のザリスキ閉包）として実現できる。冪零軌道における作用の強可視性の証明を、ファイバーへの強可視的作用から誘導されるという視点から行う。ファイバーはリー環の（線型空間としての）部分空間であるため、この作用の研究において線型空間の結果を応用することが可能である。複素単純リー環における球冪零軌道はPanyushevによって分類が与えられた。球冪零軌道の分類に沿って強可視的作用の研究を行う。

4. 研究成果

- (1) $SO(8, C)/G_2(C)$ における強可視的作用. 本等質空間は、ケーリー型球等質空間の1つである。この空間の被覆空間は、複素ケーリー代数に実現される7次元複素球面の直積として実現される。そこで、コンパクトスピノル群の7次元複素球面の直積への作用を考察し、標準座標を用いて3次元のスライスを具体的に構成し、強可視的であることを証明した。 $SO(8, C)/G_2(C)$ の強可視性は、被覆空間からの2重被覆写像を用いることで証明を与えた。なお、本等質空間の被覆空間は3対称空間であることが知られているが、この視点による解釈はまだ与えられていない。
- (2) 4対称空間における強可視的作用. 既約なアフィン球等質空間のうち、3種類の4対称空間に対してコンパクト実型的作用が強可視的であることを証明した。編み上げによる手法を用いて、4対称球等質空間に対するカルタン分解の一般化を与え、スライスを構成した。4対称空間は、底空間・ファイバーともに対称空間となるファイバー束の構造をもつ。特に球等質空間の場合、底空間は実階数1であることを突き止めた。この事実は4対称空間が球多様体であることを特徴付けていると考えられる。底空間、ファイバーに対するカルタン分解を与えても、この2つだけでは求める分解に到達できない。そこで、コンパクト群の非対称部分群による分解定理を考察することが必要となるが、底空間の実階数が1であることにより、コンパクト球面における作用による軌道分解により求める。以上により、カルタン分解の一般化を得た。なお、我々が構成したスライス

の次元はファイバーの実階数のほぼ2倍となっているが、その理由については明らかになっていない。

- (3) 複素単純リー環における球冪零軌道と強可視的作用. 複素単純リー環における内部自己同型的作用に対して、球冪零軌道におけるコンパクト実型的作用は強可視的であることを証明した。特に、分類にある各球冪零軌道に対して、スライスを具体的に与えた。これにより、複素冪零軌道に対して、球多様体、強可視的作用の2つの概念が同値であることを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Atsumu Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8, C)/G_2(C)$, *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 査読有, Vol. 2, 2011, 437-450.
- ② Atsumu Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1) \setminus SL(2n+1, C)/Sp(n, C)$, *Journal of Mathematical Sciences*, the University of Tokyo, 査読有, Vol. 17, 2010, 201-215.

[学会発表] (計14件)

- ① 笹木集夢, A generalization of a Cartan decomposition for spherical 4-symmetric spaces, 日本数学会2012年度年会函数解析学学科会, 2012年3月29日, 東京理科大学.
- ② Atsumu Sasaki, An application of the classification of visible linear actions to nilpotent orbits, JSPS-MHESRT Seminar: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Application, 2011年12月16日, El Mouradi Palace Hotel, Port Elkantaoui, スース, チュニジア.
- ③ Atsumu Sasaki, A generalized Cartan decomposition for $SL(2n+1, C)/Sp(n, C)$, DFG-JSPS Seminar "Lie Groups: Geometry and Analysis," 2011年9月7日, パーダーボルン大学, ドイツ.
- ④ 笹木集夢, A generalized Cartan decomposition for spherical 4-symmetric spaces, 研究会集「部分多様体幾何とリー群作用」, 2011年9月2日, 東京理科大学.
- ⑤ Atsumu Sasaki, Visible actions on multiplicity-free spaces, Lorentz

Center Workshop: Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, 2010年11月23日, Lorentz Center, オランダ.

- ⑥ Atsumu Sasaki, Visible actions on multiplicity-free spaces, Oberwolfach Workshop: Infinite Dimensional Lie Theory, 2010年11月17日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, ドイツ.
- ⑦ 笹木集夢, Visible actions on spherical nilpotent orbits, 2010年度表現論シンポジウム, 2010年11月10日, おおとり荘(静岡県).
- ⑧ 笹木集夢, A generalized Cartan decomposition for the non-symmetric homogeneous space $SL(2n+1, C)/Sp(n, C)$, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」, 2010年9月8日, 東京理科大学.
- ⑨ 笹木集夢, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1) \backslash SL(2n+1, C)/Sp(n, C)$, 京都大学数理解析研究所研究集会「等質空間と非可換調和解析」, 2010年6月14日, 京都大学数理解析研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

笹木 集夢 (ATSUMU SASAKI)

東海大学・理学部・講師

研究者番号: 60514453