様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月　１７日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２７４００３２
研究課題名（和文）　多様体内の準正曲面と接触構造に関する研究と複素特異点論への応用

研究課題名（英文）　Study on quasipositive surfaces in manifolds with contact structures and applications to complex singularity theory

研究代表者
石川　昌治（ISHIKAWA MASAHARU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10361784

研究成果の概要（和文）：

複素２次元ベクトル空間内で、原点からの距離が１である点の集合は３次元球面となる。この３次元球面Ｓ上の点ｘにおける接平面Ｈを複素構造 Ｊを使って回転させたものをＪＨとすると、Ｈ と ＪＨ の共通部分はＳの接平面内の２次元平面となる。点ｘ をＳ上で動かして得られるこのような平面の集まり（つまり平面場）を３次元球面の標準的接触構造という。本研究では、複素多項式とその複素共役多項式の積で与えられる多項式写像の孤立特異点のミルナー束について、それと両立する接触構造が標準的接触構造でないことを示した。複素多項式のミルナー束は常に標準的接触構造と両立することから、複素共役が混ざることでミルナー束の接触構造が変化することが観察できる。

研究成果の概要（英文）：

Let S be the unit sphere in the 2-dimensional complex vector space. For each point x in S, let H be the tangent space of S at x. We then rotate H by multiplying the complex symbol J and obtain another plane JH. The intersection of H and JH is a 2-plane in the tangent space H. The collection of such an H for all x in S is called the standard contact structure on S. In this project, we studied the Milnor fibration of an isolated singularity of a polynomial map which is obtained as a product of a complex polynomial and a complex conjugate polynomial, and proved that the compatible contact structure of such a Milnor fibration is always not the standard one.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：特異点論、低次元トポロジー、接触構造

１．研究開始当初の背景

研究課題名にある準正曲面を説明する前に、３次元多様体論における接触トポロジーの近年の発展について簡単に述べておく。多様体のオープンブック分解は多様体の構造を特徴付ける手法の一つとして古くから多くの研究がなされているが、2000 年前後の接触トポロジーの発展により、３次元多様体のオープンブック分解と接触構造との間に密接な関係があることが知られるようになった。最も重要な進展としては、Thurston と Winkelnkemper により導入されたオープンブック分解と両立する接触構造というアイデアを、凸曲面理論を使ってまとめあげた Giroux による仕事が挙げられる[1,2]。それとほぼ同時期に、 Loi と Piergallini は３次元多様体が正オープンブック分解、つまり、正のデーン捻りの積で表されるモノドロミーを持つオープンブック分解を持つことと、その３次元多様体が Stein fillable であることが必要十分であることを示した[3]。特異点理論を接触トポロジーの研究に応用しようという動きも活発であり、逆向きに向き付けされたポアンカレホモロジー球面には Stein fillable な接触構造が入らないという Lisca の結果や、4m+1 次元球面上の概複素構造の各ホモトピー類に、無限個の接触構造が存在するという Ustilovsky の結果などがその典型例と言える。また、特異点のリンクには複素構造から来る自然な接触構造が入ることが Varchenko により知られており、さらに Caubel, Nemethi, Popescu-Pampu の論文[4]では、ミルナー束と両立する接触構造が 2n+1 次元球面上の標準的接触構造であることが示されている。これらの研究をより具体的に進めるためには、低次元トポロジーのような研究対象の具体的記述が不可欠であり、そこで準正曲面が登場するわけである。

準正曲面(quasipositive surface)とは、３次元球面内に平行に配置された円板に正のバンドを貼りつけて得られるザイフェルト曲面のことである。準正曲面は 1980 年代に、複素平面曲線から得られるリンクに張られる自然なザイフェルト曲面として Rudolph により導入され、複素代数曲線との対応から良い性質をもつことが期待され、その流れで研究が進められてきた[5,6,7]。その後、接触トポロジーの影響を受け、2006 年頃に Hedden および Baader と研究代表者により、３次元球面内のファイバー曲面が準正であることと、それが標準的接触構造と両立することが必要十分であるという結果が示された[8,9]。その後の研究の方向性としては、準正曲面を使って接触構造の研究を進めることが目先の重要な課題となるが、より将来性の高い目標として、準正曲面という概念を一般の３次元多様体や高次元球面に拡張することや、準正ファイバー曲面と両立する接触構造の定義をファイバー性をもたない準正曲面に拡張することがなどが挙げられる。

２．研究の目的

準正曲面は３次元球面内で正の向きに捻られた曲面であり、３次元球面を境界とする４次元球体の複素構造と強く関係している。本研究の目的は、準正曲面を多様体のオープンブック分解、接触構造、結び目理論、ミルナー束などの広い枠組みで研究し、３次元球面における準正曲面理論を確立すること、そしてその概念を任意の３次元多様体や高次元球面などに拡張することである。これは、一般次元の特異点や高次元多様体のオープンブック分解の研究を低次元トポロジーの立場から進めるための道具を揃えるという役割も含んでいる。

３．研究の方法

まず、ザイフェルト構造をもつホモロジー球面内のファイバーリンクについて、そのザイフェルト構造と接触構造の対応について研究し、接触構造の tight 性を判定する。ここで tight 性の定義を述べる。３次元多様体内の接触構造に対し、多様体内の円板で、境界に沿った framing が平面場と一致するものが存在するとき、その円板のことを overtwisted disk という。３次元接触多様体が overtwisted disk を持たないとき、それは tight であるという。３次元球面の標準的接触構造は tight であることは Bennequin により知られている。また、３次元球面上の接触構造は分類されていて、tight な接触構造は標準的接触構造しかないことも、Eliashberg により知られている。

前述の Hedden および Baader と研究代表者の結果を組み合わせると、３次元球面内では接触構造が tight であることはファイバー曲面が準正曲面であることと同値であることが分かる。本研究で扱うのはホモロジー球面であり、先の結果を定義を含め拡張する必要がある。またその応用として，複素多項式と複素共役多項式の積で与えられる実４次元空間内の特異点のミルナー束について、それと両立する接触構造が tight かどうかを決定する。

準正曲面の定義の一般化については、上の

結果を踏まえて方向性を見つける。高次元化の方向性の１つとして、懸垂(suspension)を使って低次元の特異点から高次元の特異点の情報を引き出すという方法が挙げられる。懸垂による特異点の考察は、1974 年頃に Kauffman[10] と Neumann により行われた。特異点のリンクのオープンブック分解と接触構造との関係を懸垂を使って考察しようとすることは自然な流れであり、例えば van Koert と Niederkruger の論文[11]では、Pham-Brieskorn 多様体について、懸垂によるオープンブック分解と接触構造との関係が考察されている。この懸垂を使って高次元の準正曲面が定義できれば，それは由緒正しいものであり、さまざまな良い性質をもつと考えられる。

４．研究成果

(1) ザイフェルト構造をもつホモロジー球面内のザイフェルトファイバーリンクと両立する接触構造の研究

ザイフェルト構造をもつ３次元ホモロジー球面内のザイフェルトファイバーの和集合として得られるグラフリンクのうち、ファイバー性をもつものを扱う。グラフリンクのほとんどはファイバー性をもつことは、splice diagram を使った議論で簡単に確認することができる。ザイフェルトファイバーは正則ファイバーと特異ファイバーに分けられる。この研究ではザイファルトファイバー空間に対して Thurston-Winkelnkemper の手法を適用することで、グラフリンクのファイバー束と両立する接触構造を構成する。

ザイフェルトファイバーが正の方向に捻られている場合で、全てのリンク成分の向きがザイフェルトファイバーの向きに一致しているか、あるいは全て逆向きになっている場合には、特異ファイバーの近傍同士を接触構造を込みで自然に貼り合わせることができる。このとき得られる接触構造は Stein fillable であり、特に Gromov-Eliashberg の結果から、接触構造は tight であることが従う。リンク成分の向きがザイフェルトファイバーに対して同じものと違うものが混在している場合は、逆向きのリンク成分の近傍で接触構造を大きく捻ることで、接触構造の貼り合わせが実現される。よって、overtisted disk がこの近傍で見つかり、tight でないことが従う。以上の議論により次の結果が従う。

定理 ザイフェルトファイバーが正の方向に捻られているとき、ファイバー性をもつグラフリンクと両立する接触構造が tight であることと、全てのリンク成分の向きがザイフェルトファイバーの向きに一致しているか、あるいは全て逆向きになっていることは必要十分である。

ザイフェルトファイバーが負の方向に捻られている場合についても、一部の例外を除いて、ほとんどの場合について、両立する接触構造の tight 性を決定した。また、上の定理の応用として、次の結果を得た。

定理 f と g を２変数の複素多項式で、多項式写像 f ¥bar g は原点で孤立特異点をもつとする。このとき、そのミルナー束と両立する接触構造は tight ではない。

ここで¥bar g は複素多項式 g の共役を表す。f ¥bar g の特異点はほとんどの場合は孤立特異点であることが splice diagram 、あるいは特異点解消グラフにより簡単に確認できる。

もともとf¥bar g-型の特異点はSeadeやPichonにより研究されていて[12,13]、実解析的特異点の中でも複素多項式の性質が使いやすい良いクラスとして知られている。Pichon はこの型の特異点とザイフェルト構造との関係や、特異点解消グラフあるいはsplice diagram との関係を詳しく研究している。

上の定理は splice diagram による帰納法で証明される。splice diagram の各頂点はザイフェルトピースに、各辺がそれらの貼り合わせに対応するので、ホモロジー球面内のグラフリンクでの議論を帰納的に適用することで、f ¥bar g 型特異点のミルナー束と両立する接触構造が構成できる。この結果を準正曲面の言葉で書き換えると、f¥bar g-型の特異点のミルナー束のファイバー曲面は準正曲面ではないことが分かる。

(2) ３次元球面内のルジャンドルリンクの Thurston-Bennequin不変量の分布に関する研究

ルジャンドルリンクとは、３次元球面内の標準的接触構造に対し、各点でその平面場と接しているリンクのことである。そのリンクに沿った平面場の framing を Thurston-Bennequin 不変量という。これはルジャンドルリンクのルジャンドル変形の不変量である。この不変量はBennequinにより、各リンクのイソトピー型に対して上限があることが知られている。この上限は最大 Thurston-Bennequin不変量と呼ばれ、リンクのイソトピー型の不変量となる。

Baader氏との研究において、２成分からなる結び目に対し、その各成分の Thurston-Bennequin不変量を平面上にプロッ

トし、実現可能な点の凸包として Thurston-Bennequin多角形を定義した。各成分は最大Thurston-Bennequin不変量を実現するようにイソトピーで変形できるわけだが、２成分をリンクのイソトピー型を保ったまま同時に変形して、それらの最大 Thurston-Bennequin不変量を実現できるとは限らない。実際、Baader氏との研究で次のことを示した。

定理　２橋結び目で、Thurston-Bennequin 多角形の頂点が2つ以上のものが存在する。

x 軸がリンクの第一成分の Thurston-Bennequin不変量、y軸が第二成分の Thurston-Bennequin不変量とすると、もしリンクのイソトピー変形により両方の最大 Thurston-Bennequin不変量が同時に実現できるのであれば、Thurston-Bennequin多角形は $\{(x,y) \mid x \leqq a,\ y \leqq b\}$ の形をしており、頂点は１つとなる。つまり、上の定理は２成分をリンクのイソトピー型を保ったまま同時に変形して、それらの最大Thurston-Bennequin不変量を実現できない例が存在することを示している。

(3) Ａ多項式の因子とタングル分解に関する研究

３次元多様体内の結び目補空間の基本群の SL(2,C)表現のなす空間は、多様体の本質的曲面による分解や cyclic surgery や finite surgery などの非存在の情報をもつ重要な研究対象である。ここで cyclic surgery と finite surgery とは、得られた多様体の基本群が巡回群や有限群になるようなデーン手術のことである。Ａ多項式とは、３次元球面内の結び目補空間の表現空間を、メリディアンとロンジチュードに対応する行列の固有値を座標として、複素２次元平面に射影したものである。射影が代数的に行われる分、表現空間よりも計算しにくいが、一方で複素２変数の多項式であるので、具体的に書き下せるという利点もある。特にこのＡ多項式は結び目不変量である。

本研究ではタングル S と T に対して、N(S) が split link であるとき、N(S+T) のＡ多項式は N(T) のＡ多項式を因子として含むことを示した。ここで N(T) はタングル T の numerator と呼ばれる結び目で、タングルの上２つの端点、下２つの端点をそれぞれ繋いで得られる結び目を表す。また S+T はタングルＳとタングルＴを横に並べて、Ｓの右２つの端点とＴの左２つの端点を自然に繋いで得られるタングルを表す。N(S+T) のＡ多項式が N(T) のＡ多項式を因子として含むということは、表現空間の情報から従う結び目 N(T)の性質はすべて N(S+T)に引き継がれることを意味する。結び目図式からＡ多項式の形が特徴付けられるという結果は非常にめずらしく、複雑な結び目のＡ多項式の性質を知るために役立つものと期待できる。

これまでの研究で、２つの結び目ＫとＬに対し、それらの補空間 M(K)と M(L)の基本群の間に全射 $\pi_1(M(K)) \to \pi_1(M(L))$ がある場合、ＬのＡ多項式はＫのＡ多項式の因数分解の因子に現れることが知られている[14,15]。ただし、因子としてそのまま表れるのではなく、全射に従ったメリディアンとロンジュチュードの変数変換が必要になる。上に述べた N(S+T)のＡ多項式の因数分解は変数変換は必要はなく、N(T)をＡ多項式をそのままの式で得ることができる。さらに、論文では全射が存在しないが因数分解が存在する無限個の例が存在することを証明した。特に N(S+T) のＡ多項式の因数分解は基本群の間の全射とは無関係であることが分かる。また、具体例として RTR 結び目というクラスを導入し、10 交点以下の RTR 結び目をほぼ決定した。

【参考文献】

[1] W.Thurston, H.Winkelnkemper, On the existence of contact forms, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 345-347.
[2] E.Giroux, Geometrie de contact: de la dimension trois vers dimensions superieures, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol II (Beijing, 2002), pp.405-414, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
[3] A.Loi, R.Piergallini, Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4, Invent. Math. 143 (2001), 325-348.
[4] C.Caubel, A.Némethi, P.Popescu-Pampu, Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds, Topology 45 (2006), 673-689.
[5] L.Rudolph, Algebraic functions and closed braids, Topology 22 (1983), 191-202.
[6] L.Rudolph, A characterization of quasipositive Seifert surfaces (Constructions of quasipositive knots and links, III), Topology 31 (1992), 231-237.
[7] L.Rudolph, Quasipositive plumbing (Constructions of quasipositive knots and links, V), Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 257-267.
[8] M.Hedden, Notions of positivity and the Ozsvath-Szabo concordance invariant, J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), 617-629.
[9] S.Baader, M.Ishikawa, Legendrian

graphs and quasipositive diagrams, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 18 (2009), 285-305.
[10] L.Kauffman, Branched coverings, open books and knot periodicity, Topology 13 (1974), 143-160.
[11] O.van Koert, K.Niederkruger, Open book decompositions for contact structures on Brieskorn manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 3679-3686.
[12] A.Pichon, Real analytic germs f¥bar g and open-book decompositions of the 3-sphere, International J. Math. 16 (2005), 1-12.
[13] A.Pichon, J.Seade, Fibered multi-links and real singularities f¥bar g, Math. Ann. 324 (2008), 487-514.
[14] D.S.Silver, W.Whitten, Knot group epimorphisms, J. Knot Theory Ramification 15 (2006), 153-166.
[15] J.Hoste, P.D.Shanahan, Epimorphisms and boundary slopes of 2-bridge knots, Algebr. Geom. Topol. 10 (2010), 1221-1244.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

1. 石川昌治, Compatible contact structures of fibered Seifert links in homology 3-spheres, Tohoku Mathematical Journal, 査読有, 64巻, 2012, 25–59.
http://www.math.tohoku.ac.jp/tmj/Jmain.html

2. Sebastian Baader, 石川昌治, Legendrian framings for two-bridge links, Proceedings of American Mathematical Society, 査読有, 139巻, 2011, 4513–4520.
http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/proc

〔学会発表〕（計７件）

1. 石川昌治, Tangle sums and factorization of A-polynomials, RIMS合宿セミナー「Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds」, 2012年7月1日, 強羅

2. 石川昌治, On the factorization of A-polynomials, 研究集会「Topology of Singularities and related topics, III」, 2012年3月27日, ダラット大学（ベトナム）

3. 石川昌治, Tangle sums and factorization of A-polynomials, 第７回 代数・解析・幾何学セミナー, 2012年2月14日, 鹿児島大学

4. 石川昌治, Tangle sums and factorization of A-polynomials, 研究集会「GCOE Workshop, Circle valued Morse theory and Alexander invariants」, 2011年11月16日, 東京大学

5. 石川昌治, f¥bar g-型特異点のミルナー束と両立する接触構造について, 研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」, 2011年1月24日, 京都市職員厚生会 職員会館かもがわ

6. 石川昌治, Milnor fibrations and contact structures on S^3, 研究集会「Topology of Singularities and Related Topics, II」, 2011年1月8日, 東北大学

7. 石川昌治, On the compatible contact structures of fibered Seifert links in homology 3-spheres, 研究集会「Knots, Contact Geometry and Floer Homology」, 2010年5月27日, 東京大学

６．研究組織
(1)研究代表者
石川　昌治（ISHIKAWA MASAHARU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10361784

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：