様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２０日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：　2010～2012
課題番号：２２７４００３３
研究課題名（和文）　幾何学に対するホモトピー代数的モデルの研究

研究課題名（英文）　Research on homotopy algebraic models for geometry

研究代表者
梶浦　宏成　（KAJIURA HIROSHIGE）
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30447891

研究成果の概要（和文）：三角圏のA∞増強は一般には一意的でないことを，その例を構成することによって示した．一方，トーラスファイバー束として記述されるシンプレクティック多様体と複素多様体の間のホモロジー的ミラー対称性について，その複素多様体のある非可換変形を定め，そのミラー対としてあるシンプレクティック多様体の変形を構成し，それらの間のホモロジー的ミラー対称性を肯定的に議論した．

研究成果の概要（英文）：We showed that A∞-enhancements of triangulated categories are not unique in general by constructing such an example.
On the other hand, for the homological mirror symmetry between symplectic manifolds and complex manifolds both of which are described by torus fibrations, we constructed noncommutative deformations of the complex manifolds, define deformations of symplectic manifolds as theire mirror partners, and discussed that homological mirror symmetry between these pairs of deformations hold true.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：幾何学，トポロジー，代数学，数理物理，素粒子論

１．研究開始当初の背景
シンプレクティック多様体と複素多様体の間にミラー対称性と呼ばれる双対性が存在することが予想されてから，様々なミラー双対なシンプレクティック多様体と複素多様体のミラー対の例が議論されてきた．ミラー対は様々な同値な構造を持つが，特にそれらの持つ圏論的，あるいはホモロジー代数的構造の同値性として1994年コンツェビッチによりホモロジー的ミラー対称性予想と呼ばれるものが定式化された．これはシンプレクティック多様体上の深谷Ａ∞圏の導来Ａ∞圏と，そのミラー双対な複素多様体上の連接層の導来圏が同値であるという予想である．いままでこの予想に関する肯定的議論が様々な例において議論されていて，それらの

例からこの予想の方向性の正しいことと奥の深いことを十分にうかがうことができる．しかし，この不思議な対称性がなぜ成り立つのか？という疑問に対する根本的理解は現状では得られていない．

２．研究の目的

本研究ではこのホモロジー的ミラー対称性の根本的理解をひとつの目標とする．

一方，ホモロジー的ミラー対称性を使って幾何学の新しい変形問題を考えることも目的のひとつとする．つまり，一般に代数幾何学や非可換幾何学において，幾何学的対象あるいはその拡張に対し，その上の関数環を考える．この関数環を扱うことによって対応する幾何学的対象を理解し，その関数環の変形として幾何学的対象の変形を定めるというのがこれらの分野における考え方である．関数環のかわりに様々な代数構造を考えることもできる．幾何学的対象に対し，圏を定めるということはその一例とみることができる．これより，シンプレクティック多様体上の深谷圏の変形によってシンプレクティック多様体の変形を定めたり，複素多様体上の連接層の導来圏の変形によって複素多様体の変形を定めたりすることができると期待できる．ホモロジー的ミラー対称性が成り立つ状況においては，片側の変形が得られればそのミラー対の変形が得られることとなる．これはシンプレクティック多様体，複素多様体のどちらか一方のみの変形が定義しやすいときに，そのミラー対の非自明な変形をみつけることを可能とする．

３．研究の方法

ホモロジー的ミラー対称性の根本的理解について，現在考えられている最も有力なものは以下のようなアプローチである．

まずミラー双対なシンプレクティック多様体，複素多様体はともにトーラスファイバー束（の特異ファイバーによるコンパクト化）として表わされると仮定する．このとき両者はファイバーのトーラスの双対をとることによって関係しているものとする．これは 1995 年に Strominger-Yau-Zaslow (SYZ) によって，ミラー対称性はこのようにして実現できるのではないかと提案されたものである．

この状況でシンプレクティック多様体上の深谷Ａ∞圏，より正確にはシンプレクティックトーラスファイバーの断面からなる深谷Ａ∞部分圏を考える．このＡ∞圏と全く同じ構造を持つものとしてモースホモトピーの圏（のトーラスファイバー束の場への拡張）と呼ばれるものがあり，さらにそのモースホモトピーの圏と同じ対象を持ち，同値なＡ∞構造を持つ，モース・ドラームの圏と呼ばれるものを構成することができる．特にこのＡ∞構造は高次の積構造を含まない，次数付き微分構造というＡ∞構造のうち特別簡明なものとなっている．さらに，これが SYZ のミラー対称性の見方によって対応する複素多様体上の正則ベクトル束の成す次数付き微分圏と同一視できることとなる．

一方，一般にＡ∞圏に対し，それを含むより大きなＡ∞圏を定め，そのコホモロジーとして三角圏を得る方法が存在する．こうして得られる三角圏をものもとのＡ∞圏の導来Ａ∞圏と呼ぶ．この方法もホモロジー的ミラー対称性の定式化の際に導入されたもので，この方法で深谷Ａ∞圏の導来Ａ∞圏をとり，一方導来圏はもともと三角圏の構造を持つことから深谷Ａ∞圏の導来Ａ∞圏と連接層の導来圏の三角圏としての同値性を議論することができるわけである．

今出発点の深谷Ａ∞（部分）圏と，対応する複素多様体上の正則ベクトル束の次数付き微分圏の同値性が得られているとする．このとき両者のＡ∞圏に対して導来Ａ∞圏をとると得られる三角圏は同値となる．特に，正則ベクトル束の次数付き微分圏の導来Ａ∞圏は連接層の導来圏の三角部分圏を成す．よってこれでホモロジー的ミラー対称性の半分が示されることとなる．さらに簡単ないくつかの例においてはこの三角部分圏は連接層の導来圏全体と同値になるので一般の場合においてもある程度同様のことが期待できる．

（1）このアプローチは，ホモロジー的対称性の根本原理がかなりみえるものとなっている．しかしながら，これらの各ステップはどれも，正確に示すのは困難なものである．その困難の１つとして，シンプレクティック多様体上の深谷圏上のＡ∞構造が一意的に定義されていないことがある．一般の対象達の組の上ではＡ∞構造が一意的に定められているのであるが，対象達の特別な組の上のＡ∞構造は現在のところ一意的に定められていない．

一方，このＡ∞圏と同値なものとして定めるモース・ドラームの圏は次数付き微分圏であるため，すべての対象の組の上に容易に次数付き微分構造，つまり簡単なＡ∞構造を定めることができる．このときもちろん，深谷圏側でＡ∞構造の一意的に定められている対象の組の上では両者のＡ∞構造は同値になっている．

よって，深谷圏の一意的に定められていない部分のＡ∞構造を，すべての対象の上で両者のＡ∞構造が同値になるように定めてやればよいということになる．本研究ではこれを目標のひとつとした．

（２）一方，上述のように現在のところホモロジー的ミラー対称性は，深谷Ａ∞圏に対してその導来Ａ∞圏をとり，それと連接層の導来圏の三角圏としての同値として定式化されているのだった．しかし一般にＡ∞圏に対し，その導来Ａ∞圏をとると，もともとのＡ∞圏の情報が何も失われないという保証はない．しかし，何か情報が失われるという例も今まで公表されていなかった．本研究ではこの問題についても考えた．

実際，（１）で述べたホモロジー的ミラー対称性の根本的理解へのアプローチにおいても，深谷Ａ∞圏の導来Ａ∞圏と連接層の導来圏の同値性は三角圏をとる前のＡ∞圏の同値性から得るのであった．三角圏をとったときの情報が失われるのであればなおさら，この三角圏の同値性としてのホモロジー的ミラー対称性の定式化を見直す必要がある．

（３）ホモロジー的ミラー対称性の幾何学の変形問題への応用に関して，複素多様体のある非可換変形を比較的容易に定めることができる．それに対し，ホモロジー的ミラー対称性が成り立つようにそのミラー対のシンプレクティック多様体の変形を定めることができると期待できる．この問題を上述の（１）の設定のもとで考えた．

４．研究成果

（１）の問題については，シンプレクティック平面，その簡単な応用としての２次元シンプレクティックトーラスの場合について深谷圏のＡ∞構造の具体的構成を過去に行ったが，シンプレクティック平面の場合を高次元化をするだけでも各段に困難な問題となる．まずこれを，４次元シンプレクティック超平面の上の深谷圏のＡ∞構造の具体的構成についての研究を開始し，現在進行中である．

（２）については，一般にはＡ∞圏に対してその導来Ａ∞圏として得られる三角圏を定めると情報が失われることを，そのようなＡ∞圏の例を構成することによって示し，論文としてまとめた．

この例はかなり複雑なものとなった．つまり，比較的単純な様々なＡ∞圏についてはその導来Ａ∞圏をとっても情報が失われなかった．実際，ある特定のクラスのＡ∞圏に関しては情報が失われないことも証明した．

ホモロジー的ミラー対称性の問題においても，これは三角圏の同値性でなくＡ∞圏の同値性を議論すべきであるという主張に対して肯定的な結果ではある．しかし，例として構成したＡ∞圏は，何らかのシンプレクティック多様体上の深谷圏として実現できるのかどうかは分かっていない．つまり，ホモロジー的ミラー対称性において現れるＡ∞圏に関して，その導来Ａ∞圏をとると情報が失われるのかどうかについては，正確には分かっていない．これらの問題は将来の研究課題のひとつとして残された．

（３）に関しては，トーラスファイバー束として記述されるシンプレクティック多様体と複素多様体のミラー対について，期待通りその複素多様体のある非可換変形とそのミラー対となるシンプレクティック多様体の変形を構成し，論文としてまとめた．

複素多様体の非可換変形としては，複素多様体を実多様体とみなし，その上のあるポアソン構造のよる変形量子化として定めた．複素多様体はトーラスファイバー束として記述されていることから形式的変形パラメーターを導入せずにうまく収束する変形量子化を定めることができる．そのミラー対のトーラスファイバー束として記述されるシンプレクティック多様体は各トーラスファイバーを葉とする葉層構造を持つ．得られたシンプレクティック多様体の変形は，そのシンプレクティック構造の変形に加えて，葉層構造が変形されたものとなった．両者の間のホモロジー的ミラー対称性は，少なくとも変形されてないときのホモロジー的ミラー対称性について示されるレベルの正確さで成り立っていることがいえ，特にその議論から，定めた葉層構造の変形が自然なものであることが分かる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Hiroshige Kajiura, On A ∞ -enhancements for triangulated categories, Journal of Pure and Applied algebra 217, 1476-1503 (2013). （査読有）

② Hiroshige Kajiura, On the Structure of Open-Closed String Field Theory and Its Applications, Progress of theoretical physics supplement 188, 106-115 (2011). （査読無）
③ Hiroshige Kajiura, Homological perturbation theory and homological mirror symmetry, Progress in Mathematics 287, 201-226 (2011). （査読有）

〔図書〕（計１件）
① 梶浦　宏成，数物系のための圏論，サイエンス社，206p (2010).

６．研究組織
(1)研究代表者
梶浦　宏成　(KAJIURA HIROSHIGE)
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：３０４４７８９１