様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　5 月　17 日現在

機関番号：12605
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2010～2011
課題番号：22740035
研究課題名（和文）　カンドルと分岐被覆を用いた低次元トポロジーの研究
研究課題名（英文）　Research on low dimensional topology by using quandle and branched covering
研究代表者
　畠中　英里（HATAKENAKA ERI）
　東京農工大学・大学院工学研究院・講師
　研究者番号：00532558

研究成果の概要（和文）：

　低次元トポロジーの分野においては、結び目、曲面結び目と 3・4 次元多様体といった幾何的な対象を完全に分類することが一つの大きな課題である。位相不変量とは、幾何的な対象に代数的な値を与える写像である。不変量の構成の仕方によって、対象の幾何的な性質をうまく導き出し、分類問題に大きく役立たせることができる。そこで本研究では、カンドルという代数的構造と、分岐被覆という位相幾何の道具を用いて不変量を構成し、この分類問題にアプローチすることに成功した。

研究成果の概要（英文）：

By a covering presentation of a 3-manifold, we mean a labelled link (i.e., a link with a monodromy representation), which presents the 3-manifold as the simple 4-fold covering space of the 3-sphere branched along the link with the given monodromy. It is known that wo labelled links present a homeomorphic 3-manifold if and only if they are related by a finite sequence of some local moves. This research presents a method for constructing topological invariants of 3-manifolds based on their covering presentations. The proof of the topological invariance is shown by verifying the invariance under the local moves. As an example of such invariants, we present the Dijkgraaf-Witten invariant of 3-manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：低次元トポロジー、位相不変量、カンドル、分岐被覆、三次元多様体

１．研究開始当初の背景

（１）カンドルを用いた位相不変量に関する研究

カンドルとはある条件を満たす2項演算を持つ集合であり，群の共役演算を抽象化したものである．結び目や曲面結び目に対して，メリディアンが生成する結び目カンドルという比較的強力な不変量が定義される．実際，結び目カンドルは結び目の型を完全に分類する．しかしながら，結び目カンドルどうしを比較することは一般には困難であり，そのままでは扱いづらいため，結び目カンドルから別のカンドルへの準同型を与えて分類に役立てる方法が用いられてきた．Carter らは，結び目と曲面結び目のカンドルコサイクル不変量を構成した（Electron. Res. Announce. Amer. Math. Soc.，5（1999）pp146-156）．この不変量は，いわゆる統計和型と呼ばれる構成方法に基づくもので，結び目カンドルの準同型よりも詳しい情報を引き出すことが可能である．この不変量の登場によって，曲面結び目の分類問題は大きな展開を見せた．その一つとして3重点数と呼ばれる最も基本的な不変量による曲面結び目の分類が進展したことが挙げられる．佐藤–志摩はカンドルコサイクル不変量を使い3重点数の下からの評価を与え，2 種類の曲面結び目についてはその3重点数を決定した．本研究代表者は，彼らの評価では対象外となってしまう曲面結び目の3重点数について，カンドルコサイクル不変量を使い下からの評価を与えることに成功した．最近，佐藤は本研究代表者の方法をさらに拡張することに成功し，2-twist-spun figure eight knot という曲面結び目の3重点数が8であることを決定した．曲面結び目の分類問題においては，3 重点数が決定された例は未だこの3例のみであり，今後も3重点数による分類が進展することが期待されている．しかし現在までの評価方法ではカンドルコサイクル不変量に関する莫大な計算量が必要であり，進展の障害となっている．

（２）分岐被覆を用いた位相不変量に関する研究

Hilden と Montesinos は，向き付けられた3次元多様体が3次元球面の3重（以上の）分岐被覆で与えられることを同時期に示した（Bull. Amer. Math. Soc.，80（1974），pp1243-1244，pp845-846）．このとき底空間の分岐集合として結び目が現れる．Bobtcheva-Piergallini は2005年頃，4重以上の分岐被覆について，結び目の局所変形を使った次図の対応を与えた．これにより結び目を3次元多様体のひとつの表示と見なすことができるようになった．これを分岐被覆表示と呼ぶ．

本研究代表者は，分岐被覆表示を使って 3 次元多様体の位相不変量を構成することに注目した．そもそも3次元多様体の分類問題については，ホモロジー群やホモトピー群が古典的な不変量であった．1980年代後半には Witten により，数理物理の観点から量子不変量と呼ばれるものが多様体の切り貼り技法を用いて提案された．量子不変量はその後，3 次元多様体の手術表示やヒーガード分解，単体分割といった表示方法を用いて，組み合わせ的方法により計算可能な不変量として構成された．一方で，分岐被覆表示は比較的新しい道具であり，また量子不変量の構成方法とは一見相性が良くないために，これまでにあまり考察されていない．そこで本研究代表者は，分岐被覆表示を用いることで量子不変量とは異なるタイプの不変量ができるのではないだろうか，もしくは量子不変量を新しい角度から研究することができるのではないかと考え，研究に着手した．

本研究代表者のこれまでの研究では，まず 3 次元多様体の基本群から有限群への準同型を，分岐被覆表示としての結び目図式上に組み合わせ的方法で実現することに成功した．これを有限群によるカラリングと呼ぶ．このカラリングを用いて，基本群の準同型よりも詳しい情報を引き出す不変量を作ることを試み，そのような不変量を与えるレシピを考案した．さらにレシピに従って得られる不変量の具体例として，Dijkgraaf-Witten 不変量を再構成した．Dijkgraaf-Witten 不変量とは，3 次元多様体の単体分割による表示を用いて構成された量子不変量の一つである．これらの研究成果から，分岐被覆表示と量子不変量との間に関係を導くことに成功した．また一方でレシピをうまく改良すれば新しい不変量が発見できる可能性があることも明らかにした．新しい3次元多様体の不変量が発見できた場合には，これまでに数多く構成されてきた3次元多様体の不変量の歴史に新たな一石を投じることになり，また不変量を与える代数的な理論への発展も見込まれることから，低次元トポロジーの分野において重大なインパクトを与えるであろう．

２．研究の目的

本研究の主な目的は、分岐被覆表示を用いて主に3次元多様体の不変量を構成することである．研究期間内には、いくつかの既存の不変量を再構成し，分岐被覆表示を用いて構成される不変量のレシピを改良し，新しい不変量を探すことに役立てる．また分岐被覆表示である結び目を用いることで既存の不変量を新たな角度から研究し，結び目の理論や不変量と関係づけ，新しい性質を探る．実際，本研究代表者のこれまでの研究により，分岐被覆表示を用いて再構成された

Dijkgraaf-Witten 不変量と，結び目のシャドウコサイクル不変量との間の関係が得られている．このような観点から，分岐被覆とカンドルの両方を用いて結び目，曲面結び目，3 次元多様体の不変量の研究を行うことができるであろう．また，各 3 次元多様体に対して定まる基本カンドルと呼ばれる不変量があり，これを分岐被覆表示を用いて構成し，有限群を用いて行ったこれまでの研究と平行させることでも，分岐被覆とカンドルそれぞれに関する研究を合流させる．

３．研究の方法

まずは，カンドルを用いた曲面結び目の 3 重点数の分類についての研究を進める．

(1) これまでに 3 重点数が決定された曲面結び目はわずか 3 種類である．この決定についてはカンドルコサイクル不変量を用いて 3 重点数の下からの評価を与えている．佐藤-志摩 (Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), pp1007-1024, New Zealand J. Math. 34 (2005), pp71-79.) は位数が 3 の正 2 面体カンドルに関するカンドルコサイクル不変量を用いており，本研究代表者と佐藤の評価では位数が 5 の正二面体カンドルを扱っている．そこでその他のカンドル，たとえば位数が 7 や 9 の正 2 面体カンドルについて 3 重点数の評価を与えることを試みる．この評価を与えるためには，3 重点数が小さいものから順に構成可能な全ての曲面結び目の図式についてカンドルコサイクル不変量の値を計算する必要があり，ここで莫大な計算量が生じる．佐藤はこの障害を幾何的な道具を用いることで減らしている．本研究代表者はこれに加えてさらに計算機を用いることでこの大量計算を可能にする． またこの計算の過程で非自明な値を持つ曲面結び目が発見された場合には，その曲面結び目の 3 重点数が決定されることになる．従ってこの研究においては 3 重点数の新しい評価か，新たな曲面結び目の 3 重点数の決定かのどちらかの結果が必ずもたらされる．

(2) 具体的な曲面結び目を構成してその 3 重点数を評価する．これまでの研究や，上記(1)の研究によって得られる 3 重点数の評価法を用いることで，曲面結び目について特定のカンドルに関するカンドルコサイクル不変量の値が非自明であるならばその 3 重点数の評価が与えられる．この評価法を有効に用いるため，曲面結び目の twist-spun 型，roll-spun 型，deform-spun 型などの構成法や，motion picture や chart，braid chart といった表示法使ってカンドルコサイクル不変量の値を計算するアルゴリズムを考案し，様々な曲面結び目についてそのカンドルコサイクル不変量の値を調べ，3 重点数の決定に役立てる．

その後，3 次元多様体の分岐被覆表示を用いて不変量を構成する研究も行う．

(3) これまでの本研究代表者の研究により，分岐被覆表示を用いて構成されるような不変量のレシピが与えられている．レシピの内容は，いくつかの条件をみたす写像の組を見つけることができれば，一つの不変量を得るというものである．このレシピに従って得られる不変量の具体例として Dijkgraaf-Witten 不変量が再構成されたが，他の具体例を探し，レシピに従って得られるような新しい不変量を発見する．このためには一つの方法としてプログラム計算によって条件をみたす写像を求める．また一方で，レシピによる不変量構成の枠組みを拡張することによって Dijkgraaf-Witten 不変量以外の不変量を探すことを試みる．

(4) 分岐被覆表示を用いて，3 次元多様体の量子不変量を再構成する．例えば，単体分割による表示を用いた Turaev-Viro 不変量や，手術表示を用いた Reshetikhin-Turaev 不変量，Heegaard 分解を用いた河野による量子不変量の再構成を試みる．また再構成の過程をできるだけ一般の枠組みに拡張し，これらの既存の不変量を一例として含むような不変量構成のレシピを作成する．そしてレシピに従って得られるような新しい不変量の存在について調べる．分岐被覆表示を用いて構成される 3 次元多様体の不変量は，同時に分岐被覆表示を与える結び目の不変量にもなっているので，再構成されたこれらの量子不変量が，結び目の不変量と見た時にどのような不変量となっているのかを解明する．例えば，結び目の量子不変量として表せるか，もしくは結び目カンドルやカンドルコサイクル不変量と関係付けられるかということについて調べる．特に量子不変量とカンドルを使った不変量との直接的な関係について探求したい．

(5) 3 次元多様体の Casson 不変量とは，大まかに言えば，基本群からリー群への準同型の個数である．そこでこれまでの本研究代表者の研究において，有限群を用いて分岐被覆表示である結び目の図式上に定義したカラリングを，基本群から無限群への準同型と対応するように拡張し，Casson 不変量の再構成を試みる．Casson 不変量には，これまで様々な解釈が与えられてきた．大槻による第 1 次有限型不変量としての解釈，森田による曲面の写像類群の 2 次的特性類からの解釈，Taubes によるフレアーホモロジーのオイラー標数

としての解釈などである．Casson 不変量を再構成することで，これらの理論と分岐被覆との関係を求め，新たな解釈を与えることを見込んでいる．

(6) 3 次元多様体に対し基本カンドルと呼ばれる不変量が定義される．これは結び目や曲面結び目に対する結び目カンドルに相当する．これまでの私の研究により，3 次元多様体の基本群の表示を分岐被覆表示を用いて求めるアルゴリズムが与えられたが，この過程をもとに基本カンドルを分岐被覆表示を用いて組み合わせ的に求めるアルゴリズムを作る．そして具体的な 3 次元多様体の族について基本群から得られる 3 次元多様体の情報と基本カンドルから得られる情報とを比較し，基本カンドルの有効性について調べる．さらに基本カンドルを用いた不変量構成についても研究を行う．

(7) 3 次元多様体の分類問題については，量子不変量による分類と，幾何化予想による分類との二つの方向性がある．両者を結びつけるトピックとして，結び目の量子不変量と補空間の双曲体積とを直接に関係づける体積予想と呼ばれる予想が 2000 年頃に Kashaev-村上順-村上斉により提案され，現在まで大変注目されている．分岐被覆は本来，基本群と相性がよく，また本研究代表者のこれまでの研究により量子不変量の理論とも関係付けられることが分かってきているので，3 次元多様体の分類問題について双方向的な研究を行い，特に体積予想の解決にアプローチする．具体的にはまず分岐被覆表示の枠組みを拡張し，境界付き 3 次元多様体の分岐被覆表示を与える．そして結び目補空間の双曲体積を分岐被覆表示を使って組み合わせ的に求めるアルゴリズムを作る．一方で結び目の量子不変量を，補空間の分岐被覆表示を用いて求めるアルゴリズムについても求め，両者を比較することで関係を求める．

(8) 3 次元での理論を拡張して 4 次元 PL 多様体の不変量を構成する．Bobtcheva-Piergallini は，4 次元 2-ハンドル体について曲面結び目の図式によ分岐被覆表示を与えた．これを拡張して一般の 4 次元 PL 多様体の分岐被覆表示を与える．さらに分岐被覆表示を用いて 4 次元 PL 多様体の不変量を構成する．例えば，4 次元多様体に対する Dijkgraaf-Witten 不変量を再構成することができるであろう．このような不変量は，その境界に制限すれば 3 次元多様体の不変量となり，分岐被覆表示だけを見れば曲面結び目の不変量となる．そこでそれぞれの不変量としての性質を調べたり，カンドルを用いた不変量との関係について求める．例えば，カンドルコサイクル不変量の幾何的解釈を与えたり，3 重点数の評価に役立てることについて考える．

４．研究成果

低次元トポロジーの分野においては、結び目、曲面結び目と 3・4 次元多様体といった幾何的な対象を完全に分類することが一つの大きな課題である。位相不変量とは、幾何的な対象に代数的な値を与える写像である。不変量の構成の仕方によって、対象の幾何的な性質をうまく導き出し、分類問題に大きく役立たせることができる。そこで本研究では、カンドルという代数的構造と、分岐被覆という位相幾何の道具を用いて不変量を構成し、この分類問題にアプローチした。まず初めに、ある代数的集合（カンドル）を用意し，結び目の図式に現れる各弧にカンドルの元をひとつずつ与えた（“色ぬり”操作)。色ぬりの際に適切なルールを定めることにより、この操作が 3 次元多様体の基本群からある群への準同型を与えていることが分かった。次に，ルールを満足する全ての色ぬりの集合を考え，ある空間の部分集合と見なすことで，この不変量の値を定めた。さらに，上で得られた不変量が、Dijkgraaf-Witten 不変量という既存の不変量を含んでいることが分かった。このことにより、立体の組み合わせで計算されていたこの不変量をより平易に求めることが可能となった。またこの不変量は 3 次元多様体を対象とするものであったが，その構成から結び目のシャドウコサイクル不変量と呼ばれるものとも関係づけることにも成功した。

これらの成果に基づき、結び目や、結び目をもとに得られる 4 次元空間内の曲面結び目を対象とした不変量への拡張、さらにさまざまな不変量どうしの関係を調べる等、今後も研究を進めることによって、新しい視点から低次元トポロジーの発展へと貢献できると考えられる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 3 件)

① <u>Eri Hatakenaka</u> and Takefumi Nosaka, "Some topological aspects of 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds", International Journal of Mathematics (全 30 ページ) (掲載決定)，査読有り，DOI：10.1142/S0129167X12500644

② <u>Eri Hatakenaka</u>, "Invariants of 3-manifolds derived from covering

presentations", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 149, p263-295 (2010), 査読有り, DOI: 10.1017/S0305004110000198
③ Eri Hatakenaka and Takefumi Nosaka, "A survey: 4-fold symmetric quandle invariants of 3-manifolds", 数理解析研究所講究録, Intelligence of Low-dimensional Topology, Vol. 1716, p6-24 (2010), 査読無し

〔学会発表〕(計１件)

①畠中英里, 3 次元多様体の 4 重カンドル不変量 II, 日本数学会, 名古屋, 2010 年 9 月 22 日

６．研究組織
(1)研究代表者
畠中　英里 (HATAKENAKA ERI)
東京農工大学・大学院工学研究院・講師
研究者番号：00532558

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし