**様式Ｃ－１９**

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月３１日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22740036
研究課題名（和文）　二次特性類の明示的な構成
研究課題名（英文）　Explicit constructions of secondary characteristic classes

研究代表者
寺嶋　郁二（TERASHIMA　YUJI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：70361764

研究成果の概要（和文）：　研究代表者は2011年に山崎雅人氏との共同研究で、３次元のゲージ理論と３次元の双曲多様体論の新しい物理的な関係を発見した．その結果を論文としてまとめて、専門誌に Y. Terashima and M. Yamazaki, SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theories on Duality Walls, JHEP, 1108, 135. (2011) として公表した。これに続いて、山崎氏との共同研究で、４次元のゲージ理論における指数と（境界つきの）３次元双曲多様体の体積の関係を発見し、その結果を論文としてまとめて、専門誌に Y. Terashima, M. Yamazaki, Emergent 3-manifolds from four dimensional superconformal indices, Phys. Rev. Lett. , 109, (2012) 091602. として公表した。この関係は新しい数学的な様々な結果を示唆している．

研究成果の概要（英文）： We have found a new relation of 3-dimensional gauge theory and 3-dimensional hyperbolic geometry with Masahito Yamazaki in 2011. We have written a paper on the results. The paper has been published as Y. Terashima and M. Yamazaki, SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theories on Duality Walls, JHEP, 1108, 135. (2011). Following this work, with Masahito Yamazaki, we have found a new relation of indices in 4-dimensional gauge theories and hyperbolic volumes of 3-dimensional hyperbolic manifolds with boundary. We have written a paper on the results. The paper has been published as Y. Terashima, M. Yamazaki, Emergent 3-manifolds from four dimensional superconformal indices, Phys. Rev. Lett. , 109, (2012) 091602. This relation suggests various new mathematical results.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2010年度 | 600,000 | 180,000 | 780,000 |
| 2011年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 2012年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 年度 | | | 0 |
| 年度 | | | 0 |
| 総　計 | 2,000,000 | 600,000 | 2,600,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分トポロジー　　特性類

１．研究開始当初の背景

二次特性類は様々な分野，特にトポロジー，数論，ゲージ場の物理に共通して現れる．そこで，二次特性類を手がかりにしてトポロジー，数論，ゲージ場の物理を統一的な視点から調べることをはじめた．もともと，トポロジーにおいて，特性類は決定的な役割を果たしてきた．多様体が複素構造や葉層構造のようなより精密な構造を持つとき，その構造を感知するより精密な特性類（二次特性類）が必要になる．二次特性類は，その精密さゆえに，数論幾何，ゲージ場の物理のような様々な場所に思いがけず現れ，重要な役割を果たす．数論幾何に現れる具体的な二次特性類として，代数多様体の代数的ベクトル束の高次の代数的 K 群の特性類であるレギュレーターがある．レギュレーターは，導入されるとすぐにベイリンソン予想などの数論幾何の様々な場面で中心的な役割を担った．しかし，具体的にレギュレーターを計算しようとすると，たちまち，困難が現れる．その主な理由は，現在知られているレギュレーターの構成方法が，いずれも存在定理を用いていて，明示的な構成ではないことにあると考えられる．そこで，レギュレーターの明示的な構成をし，数論的に重要な多様体上で具体的にレギュレーターの計算を実行したいと考えた．アイデアは，今までのようにレギュレーターを代数幾何的な対象物としてとらえるのではなく，トポロジー的な対象物としてとらえ，トポロジーにおける道具を用いることにある．特に，五味清紀氏との共同研究によって導入し発展させた特性類の構成とドリーニュ・コホモロジーの積分理論が有効なのではないかと考えて，実際に，研究代表者はこの理論を用いることで零次の代数的 K 群の場合にレギュレーターの明示的な構成につぎのようなステップで成功した：

(1)レギュレーターが住んでいるコホモロジー（ドリーニュ・コホモロジー）を，微分トポロジーにおける Cheeger-Simons の微分指標の群から出発して，ホッジ・フィルターづけに付随する部分群を取り，さらに商を取ることで得られる群と同一視する．

(2)ホッジ・フィルターづけと適合している代数的ベクトル束の接続の局所的な族を一つ選んで，滑らかなドリーニュ・コホモロジーの積分理論を用いて，微分指標の群に値をもつ特性類を得る．

(3)実は，得られた特性類がホッジ・フィルターづけに付随する部分群に値をもっていることを証明し，別の接続の局所的な族を選んだときの変化が商を取ったことによって吸収されることを示す．したがって，ドリーニュ・コホモロジーに値をもつ特性類が得られる．

(4)レギュレーターの特徴づけを用いて，得られた特性類がレギュレーターと一致することを導いた．

この構成の主な利点は二つある．一つは，代数幾何的な枠組みを出ることで，微分形式のフィルターづけが与えられているときに，いつでも適用できる設定になっていることである．例えば，葉層構造の場合に，この方法を適用して得られる特性類は，ドリーニュ・コホモロジーの葉層構造版に値をもつ新しい特性類であり，レギュレーターの数論幾何における重要性を考えると，研究する価値があると考えている．もう一つの利点は，付加的な道具である接続の局所的な族を選ぶと，

二次特性類がコサイクルのレベルで得られることである．このことは，具体的な計算を実行しようとするときに決定的に重要である．つまり，付加的な道具をうまく選ぶことで，計算可能な局所的な式を得るという方法が使えるようになる．この有用性は，例えば，特性類（古典的なオイラー類やI. M. Gelfandたちによる第一ポントリャーギン類の場合など）の組み合わせ的な式が，付加的な道具に対応するコサイクルの式を得てから，単体分割にうまく合う付加的な道具を適用するという二段階で得られることを考えるとはっきりする．そこで，この零次の代数的K 群でうまくいった構成を高次の代数的K 群の場合に拡張し，数論的に重要な多様体上でレギュレーターの具体的な計算を実行すること，そしてその具体的な計算とゲージ場の物理など全く別の分野に見え隠れする二次特性類と比較しようというのが研究開始当初の背景である．

２．研究の目的
トポロジーにおいて，特性類は決定的な役割を果たしてきた．多様体が複素構造や葉層構造のようなより精密な構造を持つとき，その構造を感知するより精密な特性類（二次特性類）が必要になる．二次特性類は，その精密さゆえに，数論，ゲージ場の物理のような様々な場所に思いがけず現れ，重要な役割を果たす．本研究の目的は二次特性類の明示的な構成，具体的な計算を通して，トポロジー，数論，ゲージ場の物理の間に新しい架け橋を作ることにある．

３．研究の方法
双曲的３次元多様体の理想四面体分割やクラスター変換などを用いて，双曲体積などの明示的な表示を得ることや具体的な計算を実行することとその計算をゲージ場の物理や数論の全く別の文脈で新しい解釈を与えることに研究の方法の特徴がある．

４．研究成果
代表的な二次不変量であるチャーン・サイモン不変量や双曲体積に関連して，研究を行った．特に，山崎雅人氏との共同研究において三次元ゲージ理論と三次元双曲幾何の新しい対応を発見した．この成果は論文としてまとめて，専門誌に

Y. Terashima and M. Yamazaki, SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theories on Duality Walls, JHEP, 1108, 135. (2011)

として公表した．この関係の特徴は、双曲３次元多様体の双曲体積などの不変量を、その双曲３次元多様体とまったく異なる３次元多様体上のゲージ理論から導出できることを主張することに特徴がある。この発見はゲージ理論と３次元双曲幾何の間の新しい辞書を与えている．それぞれの理論で考えられる量が一致するべきであるというさまざまな予想を得ることができ，数学的にも興味深いのではないかと思っている．また，一方の理論で重要だと考えられている量の対応物を探すことで，まったく新しい視点を得ることができる．
特に，三次元多様体の双曲構造の方程式がまったく別の三次元多様体上のゲージ理論の分配関数から導かれることを発見した．
この結果につづいて、ここで与えられた主張をサポートする成果として、山崎氏と共同で１点穴あきトーラスの写像トーラスで双曲構造をもつ場合について、すべての場合で双曲体積が実際に３次元のゲージ理論の分配関数の準古典極限から得られるという成果

を得て、その成果を論文としてまとめた。
この結果を一般の穴あき曲面の場合に拡張しようとした試みのなかで様々な困難が現れ、新しい数学的な技術や道具が必要であるという認識にたどりついた。
このことを出発点にして，長尾健太郎氏と山崎雅人氏との共同研究でクラスター代数と３次元多様体の双曲構造の間の新しい関係を数学的に証明した.
また，四次元ゲージ理論の指数が思いがけず特別な三次元双曲多様体やサークル・パターンを決定することを発見した．このことから，双曲幾何や離散幾何の方程式に四次元ゲージ理論からの新しい解釈を与えることができた．この成果を論文としてまとめて，専門誌に

Y. Terashima, M. Yamazaki, Emergent 3-manifolds from four dimensional superconformal indices, Phys. Rev. Lett. 109, (2012) 091602.

として発表した．この発見はゲージ場の物理の分配関数に現れた多重対数関数を双曲幾何の言葉で解釈することから生まれ，研究の過程で，双曲幾何だけでなく，ゲージ場の物理にも高次の代数的K 群が見え隠れしているのが分かった．このように，二次特性類の研究を通して，数論幾何と双曲幾何とゲージ場の物理のより深い関係が見つけられるのではないかと考えている．．関連して，三次元多様体の数論的類似についての森下昌紀氏との共同研究についても新しい展開があった.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）


① Y. Terashima, M. Yamazaki, Emergent 3-manifolds from four dimensional superconformal indices, Phys. Rev. Lett. , 査読有, 109, (2012) 091602.

② Y. Terashima and M. Yamazaki, SL(2,R) Chern-Simons, Liouville, and Gauge Theories on Duality Walls, JHEP, 査読有, 1108, 135. (2011)

③ K. Gomi, Y. Terashima, Chern-Weil construction for twisted K-theory, Comm. Math. Phys. 査読有, 299 (2010), no. 1, 225-254


６．研究組織
(1)研究代表者
寺嶋　郁二（TERASHIMA　YUJI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号：70361764

(2)研究分担者
なし.

(3)連携研究者
なし.