様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：14501
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2012
課題番号：22740039
研究課題名（和文）　一次元結び目の時間的変化と曲面結び目の不変量
研究課題名（英文）　1-parameter family of 1-knot and invariant of surface-knot

研究代表者
佐藤　進（SATOH SHIN）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90345009

研究成果の概要（和文）：４次元空間内の曲面（曲面結び目）の不変量に関する性質を明らかにした；ロールスパン結び目のカンドルコサイクル不変量が常に自明になること、および、どんな非自明７彩色も６色を必要とする２次元結び目の存在を示した。
一方で、トーラスの埋め込みと密接な関係のある仮想結び目の性質を明らかにした；２種類の交点数に関する実現問題や、ねじれ数、および上方群と下方群の実現問題についてさまざまな結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We study many properties of knotted surfaces in Euclidian 4-space; in particular, we prove the triviality of the quandle cocycle invariant of s roll-spun knot, and the existence of a 2-knot for which any 7-coloring requires at lest 6 colors. On the other hand, a knotted torus in 4-space is closely related to a virtual knot. We also study many properties of virtual knots such as two kinds of crossing numbers, n-writhes, and the upper and lower knot groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：結び目理論

１．研究開始当初の背景

３次元空間の中の１次元結び目（古典的結び目という）の研究が盛んに行われている一方で、４次元空間の中の曲面（曲面結び目という）に関する研究は数が少なく、未知な部分が多かった。また、トーラスの埋め込みの曲面結び目は、仮想結び目と密接な関係があることは分かっていたが、仮想結び目の性質に関しても十分に研究がなされていなかった。

２．研究の目的

（１）ロールスパン結び目について、その射影図を具体的に与え、さらにカンドルコサイクル不変量を計算して性質を調べる。

（2）７彩色可能な曲面結び目について、非自明な７彩色に必要な色の種類の最小値を調べ、古典的結び目との性質の違いを明らかにする。

（3）仮想結び目に対して実交点数と仮想交点数が定義されるが、そのふたつの不変量の下からの評価を与え、どのような関係があるかを調べる。

（4）n を整数とする。仮想結び目に対して n ねじれ数が定義されるが、その性質について明らかにする。特に n ねじれ数全体の間に成り立つ関係式をみつける。

（5）仮想結び目に対する結び目群は、上方群と下方群の二種類があり、これらは一般に同型ではない。この群のペアがどのようなものかを調べる。

（6）古典的結び目の交差交換の列として、Baarder によって構成されたものがあるが、その列が本質的に同じであるか異なるのかを調べる。

（7）p 彩色可能な古典的・仮想結び目について、非自明な p 彩色に必要な色の種類の最小値を下から評価する。またその評価が最善であるかどうかを調べる。

（8）平面曲線に対してステイト数という概念を導入し、その性質について調べる。この定義は古典的・仮想結び目のステイト数に拡張できる。その性質の違いについても明らかにする。

（9）古典的結び目の射影図に沿って、その上下を記録することで OU 列と呼ばれる文字列が得られる。この OU 列が元の結び目の性質をどれくらい反映しているかを調べる。

３．研究の方法

（1）ロールスパン結び目を動画法で表し、それをもとに射影図を構成する。さらにその射影図の p 彩色がどのように与えられるかを調べ、カンドルコサイクル不変量の計算につなげる。

（2）非自明に７彩色された射影図において、三重点のまわりの７枚のシートに何色が現れるかを調べる。特に５色が現れる場合の状況を特定し、その場合の曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の形を特徴付けることで、色の種類の最小値の評価につなげる。

（3）仮想結び目の実交点数と仮想交点数の下からの評価を、ジョーンズ多項式のスパン、宮澤多項式のスパンと重み付き次数を用いて与える。

（4）仮想結び目の n ねじれ数は射影図のガウス図式を用いて定義される。そこで、ガウス図式の性質を利用することで、n ねじれ数の性質を明らかにする。また n ねじれ数は実交点数とも関係するので、その下からの評価を与える。さらに、交差交換やデルタ変形といった局所変形との関係をガウス図式を通して調べる。

（5）仮想結び目の結び目群は禁止変形のひとつで不変であることから、溶接結び目の不変量とみなせる。この局所変形をガウス図式の言葉で翻訳することにより、２橋結び目のガウス図式が溶接結び目としてどのような形に変形できるか調べる。さらにそのときに下方群をみることで、ひとつの仮想結び目からどのような群のペアが実現できるかを明らかにする。

（6）古典的結び目の交差交換の列を、４次元の中の曲面（コボルディズム）とみなすことで、その分類に曲面結び目の変形を利用することができる。特に交差交換の列が結び目図式であらわされているときは、コボルディズムの射影図を構成することができるので、ローズマン変形を適応することにより列の分類につなげる。

（7）p 彩色された結び目の射影図からパレットグラフとよばれるある種のグラフを導入する。さらにそのグラフの隣接行列を利用することにより、p 彩色の色の種類の最小値の下からの評価を与える。また、逆にその最小値を実現する仮想結び目をみつけるために、p 彩色をガウス図式の言葉で解釈しなおし、実現問題を解決する。

（8）ステイト数は結び目のジョーンズ多項式の定義に現れるステイトの概念を利用して定義される。このことから、平面曲線の１ステイト数と古典的結び目の行列式との関連を明らかにする。さらに、ステイトの概念をガウス図式に導入することにより、仮想結び目の実交点数と n ステイト数の間の関係を調べる。特に３ステイト数が消える仮想結び目の性質について調べる。

（9）まず、OU 列に対する良く知られた条件（O と U の文字の数が一致）が、自明な結び目で実現されるかどうかを調べる。次に、どのような文字列が三葉結び目で実現されるかを、ガウス図式を利用しながら調べる。さ

らに、与えられた多項式が三葉結び目のひずみ多項式となるための必要十分条件を調べる。

４．研究成果

（１）曲面結び目の重要なクラスとしてリボン型と変形スピンが知られている。リボン型曲面結び目のカンドルコサイクル不変量は常に自明となる一方で、変形スパン結び目は一般に非リボン型なので非自明な値をとる。特にツイストスパン結び目に対しては、自身の研究も含め、これまでに様々な計算がなされてきた。そこで佐賀大学の岩切氏との共同研究によって、ロールスパン結び目に対するカンドルコサイクル不変量の計算手法を確立した。すなわち、古典的結び目Ｋの射影図を用いて、Ｋのｎロールスパン結び目ρnKの射影図を構成し、ρnKのカンドルコサイクル不変量がＫのシャドウコサイクル不変量によって計算できることを明らかにした。その結果、カンドルＸがある一般的な条件をみたすとき、ρnKのＸによる任意のカンドルコサイクル不変量はつねに自明になることが分かった。このことは、非リボン型であるにも関わらず、カンドルコサイクル不変量がつねに消える曲面結び目のクラスが始めて発見されたという点で興味深い。この研究の論文は、現在準備中である。

（２）p彩色可能な曲面結び目Ｋを非自明にp彩色するために必要な色の種類の最小値をCp(K)とおく。一般に

$$C3(K)=3,\ C5(K)\geqq 4,\ C7(K)\geqq 4,\ C11(K)\geqq 5$$

であること、およびＫの５彩色に関するカンドルコサイクル不変量が非自明ならばC5(K)=5であることが、これまでの研究で分かっている。そこで上智大学の大城氏との共同研究において、７彩色に関するＫのカンドルコサイクル不変量が非自明ならば、

$$C7(K)\geqq 6$$

が成り立つことを示した。さらに、Ｋが５の2結び目の2ツイストスピンと呼ばれる曲面結び目のとき、実際にC7(K)=6が成り立つことも示した。この結果は一般にCp(K)がリボン型であるための障害に成りうることを示唆している点で興味深い。この研究の論文は、現在投稿中である。

（３）仮想結び目Ｋに対して、実交点の個数の最小値をr(K)，仮想交点の個数の最小値をv(K)とおく。それまでに知られている仮想結び目はr(K)>v(K)をみたしていた。この不等式がすべてのＫに対して成り立つかどうかは未解決問題である。神戸大学の冨山氏との共同研究により、次の結果を得た：m>nをみたす任意の自然数m，nに対して、

$$r(K)=m,\ v(K)=n$$

をみたす仮想結び目Ｋが存在する。この証明のために、r(K)およびv(K)の下からの評価を、Ｋのジョーンズ多項式や宮澤多項式を用いて与えることができた点で重要な研究である。この研究の論文は掲載済である。

（４）Kauffmanにより、仮想結び目の奇数ねじれ数が導入された。これは仮想結び目の重要な不変量のひとつである。そこで神戸大学の谷口氏との共同研究において、その奇数ねじれ数の精密化として、仮想結び目Ｋのｎねじれ数Jn(K)を定義した(nは0以外の整数)。これらの数の間には、n×Jn(K)の（0以外のnにわたる）和が0になるという関係式が成り立つ。Ｋの実交点数をr(K)，ジョーンズ多項式をVK(t)とおくとき、任意のn≧3に対して

$$r(K)=n \text{ かつ } VK(t)=1$$

をみたす仮想結び目Ｋが存在することが分かる。また、Ｋが交差交換で自明な結び目になる場合には、その結び目解消数をｎねじれ数で下から評価することができた。さらに、ｎねじれ数はデルタ変形によって変化しないことも分かった。最後に、ふたつの仮想結び目の奇数ねじれ数が等しいための必要十分条件が、ある特殊な局所変形で移り合うことが分かった。これは奇数ねじれ数に対応する局所変形の決定という点で興味深い。今後は各Jn(K)に対応する局所変形をみつけたい。この研究の論文は、すでに掲載済である。

（５）結び目の不変量として結び目群があるが、仮想結び目に対しては上方群と下方群は一般には同形でない。どのような群のペアがひとつの仮想結び目の上方群・下方群として実現されるかは全く分かっていなかった。仮想結び目Ｋに対して、上方群・下方群をそれぞれG+(K)，G-(K)とおく。大阪電気通信大学の中村氏、神戸大学の中西・冨山氏との共同研究において、次のことを示した：G1およびG2をそれぞれ、ふたつの生成元とふたつの関係式をもつ群とするとき、

$$G+(K)=G1,\ G-(K)=G2$$

をみたす仮想結び目が存在する。この定理の証明の系として、任意の仮想２橋結び目は溶接結び目のカテゴリーにおいて（図式的な意

味で）合成結び目であることが分かる。この性質は古典的結び目における、任意の２橋結び目は素である、という性質と比べると異なる性質を示している。この研究の論文は、すでに掲載済である。

（６）結び目の時間的変化におけるもっとも単純なモデルとして交差交換の列が考えられる。このような列をなんらかの意味で区別・分類する方法のひとつとして、コボルディズムによる分類を提案した。これに基づいて、Baader 氏によって構成されたゴルディアン距離が２である結び目のペアをつなぐ無限通りの列が、実は４次元空間の観点から見ると本質的にすべて同じであることを示すことができた。同様に、内田氏によって構成された、ゴルディアン距離が１である結び目のペアをつなぐ無限通りの列も、実は４次元的にはすべて同じであることが分かった。このことは、結び目の時間的変化を分類する上で、４次元的観点から異なる列を構成することの困難さを示している。

（７）（２）で述べた曲面結び目の不変量は、古典的・仮想結び目 K にも定義される。これを同じく Cp(K)とかくことにする。（２）の研究の時点では Cp(K)の下からの評価を p で与えることはできていなかったが、中村氏と中西氏との共同研究によって、次のき評価式を得ることができた：

$Cp(K) \geqq [\log p]+2.$

ただし、log p の底は 2 であり，[ ]はガウス記号とする。これはいままでの p=3,5,7,11 に対する不等式を含んでいることがわかる。さらに、任意の p に対して、上の不等式の等号が成り立つ仮想結び目 K が存在することが示せた。この意味で、不等式は最善である。いまのところ、等号を成り立たせる古典的結び目 K が存在するかどうかは未解決である。この研究の論文は現在投稿中である。

（８）自己交差をもつ曲線 C に対して、各交点を平滑化して得られる曲線をステイトといい、とくに i 個の円周からなるとき i ステイトという。C から得られる i ステイトの個数を C の i ステイト数といい､si(C)とおく。また結び目 K に対して、K のすべての射影図 D にわたる si(D)の最小値を K の i ステイト数といい si(K)とかく。中村・中西・富山氏との協同研究において、si(C)および si(K)の様々な性質を明らかにした。特に非自明な仮想結び目 K が s3(K)=0 をみたすならば、次のいずれかが成り立つ：

・K のある n ねじれ数が 0 でない
・K の上方群と下方群が同型でない
・K の宮澤多項式が非自明である

したがって、特に非自明な古典的結び目 K に対してはたとえ仮想結び目のカテゴリーに拡張しても s3(K)>0 であることが分かるので、特に三葉結び目 K は s3(K)=1 をみたす。この研究の論文は現在準備中である。

（９）n 個の交点をもつ有向古典的結び目の射影図 D に対して、O と U を並べた長さ 2n の文字列を、D に沿って上交点・下交点を通過したときのデータを用いて定義する。例えば D が交代的射影図ならば OUOU...となる。神戸大学の比嘉・中西・山本氏との共同研究において、まず次の結果を得た：OU 列 W に対して以下は同値である。

・W はある自明な結び目 K の射影図の OU 列である。
・W の中の O と U の個数は同数である。

K が三葉結び目の場合、その OU 列 W が O と U を同数含むだけでは不十分であり、例えば

W=OUUOOOUU

を実現する射影図 D はつねに自明な結び目を表すことが分かる。この研究において、W が三葉結び目のある射影図で実現されるための必要十分条件を与えることができた。さらに、群馬大学の清水氏によって導入されたひずみ多項式が、我々の OU 列と深い関係があることを明らかにし、与えられた多項式が三葉結び目の射影図のひずみ多項式となるための必要十分条件も同時に与えることができた。この研究の論文は掲載済である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

①. R. Higa, Y. Nakanishi, <u>S. Satoh</u>, and T. Yamamoto
Crossing information and warping polynomials about the trefoil knot
J. Knot Theory Ramifications 21 (2012) no. 12
1250117
11 pp
査読有

② T. Nakamura, Y. Nakanishi, <u>S. Satoh</u>, and Y. Tomiyama

Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots
J. Knot Theory Ramifications 21
(2012) no. 10
1250095
18 pp
査読有

③ S. Satoh and Y.Tomiyama
On the crossing numbers of a virtual knot,
Proc. Amer. Math. Soc. 140
(2012), no. 1
367-376
査読有

〔学会発表〕(計 3 件)

①佐藤進
結び目の OU 列とその応用
日本数学会年会
2013. 3. 20.
京都大学

②佐藤進
平面曲線と結び目のステイト数
日本数学会秋季総合分科会
2012, 9. 20
九州大学

③佐藤進
ロールスパン結び目のカンドル不変量
日本数学会年会
2011. 3. 20
早稲田大学.

6．研究組織

(1)研究代表者
佐藤　進 (SATOH SHIN)
神戸大学. 大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90345009