

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月7日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740040

研究課題名（和文）非ケーラー構造によるコンパクト等質複素多様体に関する研究

研究課題名（英文）Studies of compact homogeneous complex manifolds via of non-Kähler structures

研究代表者

山田 拓身 (YAMADA TAKUMI)

島根大学・総合理工学研究科・准教授

研究者番号：40403117

研究成果の概要（和文）：コンパクト等質複素多様体について、非ケーラー構造を用いて研究を行なった。その研究成果として、新しい擬ケーラー構造をもつコンパクト可解多様体の例が構成でき、さらに、そのリッチ曲率が0であることが示せた。また、コンパクト擬ケーラー多様体のキリング・ベクトル場に対応する正則型ベクトル場が正則ベクトル場になる事を示した。これにより自己同型群についての結果が得られた。また旗多様体の擬ケーラー計量の指数について詳しい状況がえられた。

研究成果の概要（英文）：

I studies compact homogenous manifolds by using non-Kähler structures. I have constructed new examples of compact complex solvmanifolds which admit pseudo-Kähler structures, and I have shown that the Ricci curvatures of the above manifolds are zero. I also had that a Killing vector field on a compact pseudo-Kähler manifold is an infinitesimal automorphism of the complex structure. I also got results about signatures of pseudo-Kähler metrics on flag manifolds.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：擬ケーラー多様体・リー群・リー環・等質空間

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の学術的背景は次の通りである。

(1) ケーラー構造をもつコンパクト複素等質多様体の構造定理に関しては十分な結果が得られていた。例えば

①1955年にWangはコンパクト複素平行可能多様体がケーラー構造をもつならば複素トーラスとなることを、複素構造から定まる Dolbeaultコホモロジー群を決定し、それに Hodge理論を適用することで証明した。

②1950年代から60年代にかけて松島与三-Borel-Remmert はコンパクト等質複素多様体がケーラー構造をもつならば、複素幾何的構造としては単純に旗多様体と複素トーラスの直積になることを示した。

(2) 1980年代後半から擬ケーラー構造をもつコンパクト等質複素多様体の研究が本格的に行われ始めた。例えば、松島の等質ケーラー多様体に関する結果は、1989年頃に Dorfmeister-Guan により、等質擬ケーラー多様体の場合に一般化され、1990年には Huckleberryにより Dorfmeister-Guan の結果に対し、シンプレクティック多様体論で使われる運動量写像をもちいた別証明が与えられた。

(3) 1990年代にGuan は正則シンプレクティック構造をもつ場合に上記と同様の研究とその微小変形を考察した。

(4) Fernandezらのスペインのグループは、擬ケーラー構造、局所共形平坦ケーラー構造等をもつ非ケーラーコンパクト複素多様体の例を、冪零多様体でいくつか構成した。

(5) 日本では沢井洋氏による局所共形平坦ケーラー構造をもつ可解多様体の研究、鎌田博行氏のニュートラル・ケーラー構造をもつ多様体の研究、また坊向伸隆氏のアファイン対称空間上の擬エルミート計量の研究等がなされていた。

しかし非ケーラーコンパクト複素多様体の知られている例は全体的にみると、きわめて散発的であり、非ケーラーコンパクト複素多様体の一般的な構造定理はほとんど存在せず、その一般的研究はほとんどすすんでいない状況であったことが、本研究をおこなう動機であった。

2. 研究の目的

研究目的は、”非ケーラー構造の存在・非存在という観点からコンパクト等質複素多様体

の複素幾何的構造とunderlying な位相構造を調べること”である。

ここで非ケーラー構造の例としては、ローレンツ計量、擬ケーラー構造、あるいはシンプレクティック構造などがある。ケーラー構造はこれら構造の特別なものと考えられるが、ここでは非ケーラー構造はケーラー構造ではない場合とし、非ケーラー多様体はケーラー構造をもたない多様体を意味する。

具体的な研究目的は

(1) コンパクト複素多様体がある非ケーラー構造をもつための必要条件、あるいは必要十分条件の決定。

(2) 非ケーラー構造をもつコンパクト等質複素多様体のde Rham コホモロジー群、および Dolbeaultコホモロジー群の次元の評価

(3) 非ケーラー構造の場合の松島与三-Borel-Remmert 型理論の構築。

(4) 非ケーラー構造をもつコンパクト等質複素多様体のunderlying な位相構造の決定。

(5) 非ケーラー構造の微小変形の決定。

(6) 不定値計量に関する断面曲率、Ricci 曲率、スカラー曲率に関して調査し、基本群などとの関連を調べる。

3. 研究の方法

研究方法は次の通りである。

(1) コンパクトケーラー多様体に関する情報収集する。

(2) 非ケーラー構造のひとつである擬ケーラー構造の場合をまず研究し、局所共形平坦ケーラー構造、正則シンプレクティック構造等の非ケーラー構造の場合の研究をする。

また(2)の研究はケーラー構造の場合を参考にして次のようにおこなう。

(3) 不変量等の計算

(de Rahmコホモロジー、Dolbeault コホモロジー群等の計算)

⇒ 等質複素幾何的構造の研究

(Borel-Remmert 型定理)

⇒ 位相構造関連も含む研究(Hodge 型理論)。

具体的な方法として、共同セミナーを開催し、関係する研究集会、および幾何学シンポジウムに積極的に参加し、当該分野の研究者と活発な議論を行う。また計算機を用いてコホモロジー群の次元等の計算や文献等を持ちいて関連する分野の情報収集をおこなう。

4. 研究成果

主に次の成果が得られた。

(1) 余コンパクト離散部分群をもつ可解リー群の高次元の例はあまり知られておらず、国内外を問わず、余コンパクト離散部分群の存在を仮定して、可解多様体の研究が行われる事が多い。これに対して、余コンパクト離散部分群をもつ可解リー群の新しい例の構成が複数できた。これは非ケーラー構造をもつコンパクト多様体の構成に利用でき、次元の比較的低い場合に擬ケーラー構造の入る例の構成ができた。また、可解多様体の可解リー環がある種の分解を持ち場合に、任意の不変な擬ケーラー構造に関して、リッチ曲率が恒等的に0になることを示した。これは以前の研究成果の拡張であり、リッチ平坦な擬ケーラー多様体が多く存在すること示した。今後の展望として、得られた構成法の拡張が考えられ、興味深い多様体がさらに構成できる可能性がある。

(2) コンパクトケーラー多様体の正則ベクトル場の性質は松島やLichnerowiczらにより、詳しく調べられている。例えば、コンパクト複素多様体がケーラーアインシュタイン計量をもつならば、キリング・ベクトル場を考える事で、自己同型群のリー環は reductive リー環となることが知られている。擬ケーラ

ー計量の場合に同様な考察により、キリング・ベクトル場に対応する正則型ベクトル場は正則ベクトル場になることが示せた。応用として、コンパクト擬ケーラー複素平行可能多様体のキリング・ベクトル場に対応する正則ベクトル場は可換環になることがわかった。また1st チャーン類がとなるコンパクト複素等質空間は複素可解多様体となることがしめせた。今後の展望として、1st チャーン類が0となるコンパクト複素多様体が擬ケーラー構造をもつときに、自己同型群のリー環が可解リー環となるかの研究があげられる。

(3) 旗多様体の不変な複素構造は T-ルートをを用いて述べることができ、また旗多様体は不変なケーラーアインシュタイン計量を持つ事が知られている。ではケーラーでない不変アインシュタイン計量がどの程度あるか、という問題は古くから研究されている。本研究では同様な問題として、旗多様体は擬ケーラー計量の指数としてどのようなものが出てくるかについて研究をおこない、特に T-ルート系がある種のルート系になるときに指数の具体的な計算法を構築した。これにより、微分可能多様体としては同じでも、複素構造が異なる場合に現れる指数が異なる場合が多く現れた。すなわち、指数について調べる事は、旗多様体に異なる不変複素構造がどの程度あるかに関わりをもつ。また、今後の展望として、旗多様体以外の微分可能多様体に関しても、異なる複素構造かどうかの判定等に擬ケーラー計量の指数を用いることができることを示唆する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

① 山田拓身、Ricci flatness of certain compact pseudo-Kähler solvmanifolds、Journal of Geometry and Physics、査読有、62巻、2012、1338-1345
<http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2011.06.006>

② 山田拓身、Holomorphic vector fields of compact pseudo-Kähler manifolds、Journal of Geometry and Physics、査読有、62巻、2012、740-745
<http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2011.08.001>

[学会発表] (計5件)

① 山田拓身、一般化された旗多様体の不変擬ケーラー構造の指数について、多様体と幾何構造の融合、2013年3月6日、名城大学 (名古屋)

② 山田拓身、非ケーラー構造をもつ複素等質空間の正則ベクトル場について、複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺、2012年12月7日、龍谷大学セミナーハウスともいき荘 (京都)

③ 山田拓身、Some studies on compact non-Kähler manifolds、松江微分幾何学研究会 2011、2011年12月17日、島根大学 (松江)

④ 山田拓身、コンパクト擬ケーラー多様体の正則ベクトル場について、松江微分幾何学研究会 2010、2010年12月11日、島根大学 (松江)

⑤ 山田拓身、コンパクト擬ケーラー多様体の正則ベクトル場について、擬リーマン幾何学の展開 III、2010年12月19日、お茶の水大学 (東京)

[その他]

ホームページ等

<http://www.shimane-u.ac.jp/docs/2010113000376/files/treasure5.pdf>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 拓身 (YAMADA TAKUMI)

島根大学・総合理工学研究科・准教授
研究者番号：40403117

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：