様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 9 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2011
課題番号：２２７４００４３
研究課題名（和文）　Floer 理論によるラグランジュ部分多様体の対の交叉の研究

研究課題名（英文）　Research on intersection of a pair of Lagrangian submanifolds via Floer theory

研究代表者
入江　博（IRIYEH HIROSHI）
東京電機大学・未来科学部・准教授
研究者番号：30385489

研究成果の概要（和文）：
Arnold-Givental 予想は、シンプレクティック多様体 M の反シンプレクティックな対合による固定点集合として得られるラグランジュ部分多様体 L と、そのハミルトン微分同相写像Φによる像Φ(L)との交点数を L の Z_2係数のベッチ数の和で下から評価するものである。本研究では、これを二つのラグランジュ部分多様体の対に対して拡張する研究を行った。特に、M が既約エルミート対称空間の場合に一般化された Arnold-Givental 予想を定式化し、これを証明することができた。

研究成果の概要（英文）：
The Arnold-Givental conjecture states that the intersection number of Lagrangian submanifold L, which is the fixed point set of an anti-symplectic involution of a symplectic manifold M, and its image Φ(L) by Hamiltonian diffeomorphism Φ of M is greater than or equal to the sum of Z_2-Betti numbers of L. We tried to extend the conjecture to the case of a pair of Lagrangian submanifolds. As a result, we could formulate the generalized Arnold-Givental conjecture and prove it for the case of an irreducible Hermitian symmetric space M of compact type.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：シンプレクティック多様体、Floer ホモロジー、エルミート対称空間、実形、ラグランジュ部分多様体、ハミルトン体積最小性、Arnold-Givental 不等式、対蹠集合

１．研究開始当初の背景

Arnold-Givental 予想は、シンプレクティック多様体 M の反シンプレクティックな対合による固定点集合として得られるラグランジュ部分多様体 L について、L とそのハミルトン微分同相写像Φによる像Φ(L)が横断的に交わればその交点数が L の Z_2係数のベッチ数の和で下から評価できるであろう、という予想である。これは 1960 年代に定式化さ

れたハミルトン系の周期解の個数の評価に関する Arnold 予想の一つの形である。

この予想については 1980 年代以降に大きな進展があった。Floer は、Floer ホモロジー理論を導入することにより L の２次の相対ホモトピーが消える場合に Arnold 予想を解決した（Morse theory for Lagrangian intersections, J. Diff. Geom., 18 (1988), 513-547)。1990 年代に入ると Y.-G. Oh は、Floer ホモロジーの理論をラグランジュ部分多様体 L が単調の場合にまで拡張し(Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks I, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 949-993)、Arnold-Givental 予想を既約コンパクト型エルミート対称空間の実形の場合に解決した(Floer cohomology of Lagrangian intersectins and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture, The Floer Memorial volume, Progr. Math., 133 (1995), 555-573)。現在この結果はさらに改良され、かなり一般的な設定まで拡張されている(深谷賢治-Oh-太田啓史-小野薫, Lagrangian Intersection Floer Theory - Anomaly and Obstruction)。

その一方、シンプレクティック多様体 M の異なる二つの（互いにハミルトンアイソトピックでない）ラグランジュ部分多様体 L_1 と L_2 に対する交点数 $\#(L_1\cap\Phi(L_2))$ の評価の研究はほとんど手がつけられないまま残されており，今後のラグランジュ交叉の研究の中心の一つとなりうる広大な研究領域がある。研究開始当初は、具体的なものとしては G. Alston による複素射影空間の中の実射影空間($=L_1$)とクリフォードトーラス($=L_2$)（ただし，次元が奇数の場合)の結果があるのみであった。(Lagrangian Floer homology of the Clifford torus and real projective space in odd dimensions, J. Symp. Geom., 9 (2011), 83-106)。

関連する研究として，交叉 $L_1\cap\Phi(L_2)$は空でないというタイプの結果はいくつか知られているが、Floer ホモロジー自体は異なる二つのラグランジュ部分多様体に対して定義可能であり、また、極小部分多様体論の分野で興味をもたれているラグランジュ部分多様体のハミルトン体積最小性問題への応用を視野に入れると、単に L_1 と $\Phi(L_2)$が交点をもつというだけでは不十分であり、Floer ホモロジーを計算することにより交点数 $\#(L_1\cap\Phi(L_2))$ の最良評価を行う研究を発展させる必要があった。

２．研究の目的

この状況下、本研究では、二つの（互いにハミルトンアイソトピックとは限らない）ラグランジュ部分多様体 L_1 と L_2に対するハミルトン微分同相写像Φによる変形の下での交点数 $\#(L_1\cap\Phi(L_2))$ の評価の研究を開始し、特に、M が複素２次超曲面の場合にこの交点数の最良評価を行う。二種類のラグランジュ部分多様体 L_1 と L_2について交点数の評価が困難な理由は、第一に、モースの不等式から交点数の最小値が予測できる $L_1=L_2$の場合と違いその予測が容易にはつけられないことにある。複素２次超曲面を最初のターゲットとした理由は、以下の３つである。

- 複素射影空間の次に扱いやすいコンパクト型エルミート対称空間であること。
- 実形（全測地的ラグランジュ部分多様体）が豊富にあること。k 次元球面と(n−k)次元球面の積の対角的な Z_2作用による商で表せる。
- Φが正則等長変換の場合には交点数 $\#(L_1\cap\Phi(L_2))$ が計算されていたこと。

３つ目の点について説明する。この研究と全く独立に田崎博之氏（筑波大）は、対称空間論の立場から複素２次超曲面の二つの実形の横断的な交叉の構造を決定していた(The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. 62 (2010), 375-382)。この結果からΦが正則等長変換の場合の交点数 $\#(L_1\cap\Phi(L_2))$ がわかり、次のような一般化された Arnold-Givental 予想を定式化する手がかりとなった。

予想. M を複素２次超曲面とし、L_1 と L_2 を M の二つの実形とする。L_1 とΦ(L_2)が横断的に交わるような任意のハミルトン微分同相写像Φについて、交点数 $\#(L_1\cap\Phi(L_2))$ は L_1 または L_2 の Z_2係数のベッチ数の和の小さいほう以上になる。

本研究は、この予想を完全に解決することを目的とした。$L_1=L_2$ のときは通常の Arnold-Givental の不等式となり、前述の Oh の結果が複素２次超曲面の場合に復元される。また、応用として、この交点数の評価と積分幾何の Crofton 型公式を併用して、複素２次超曲面の実形の中から新しいハミルトン体積最小なラグランジュ部分多様体の例を見つけることも目標とした。

３．研究の方法

この予想を解決するための研究方法として、単調なラグランジュ部分多様体の Z_2係数の Floer ホモロジー理論を用いる。複素２次超曲面において実形の対の Floer 複体の境界作用素を構成するためには、L_1および L_2に境界をもつ正則な strip を分類しなければなら

ない。田崎氏の方法により二つの実形 L_1 と L_2 の交点数のみならず交叉 $L_1 \cap L_2$ の配置の様子も完全に記述できる。これは、正則な strip を分類する際の大きな手がかりとなる。この構造を利用して、以下のように段階的に研究を進める。

（１）２次元の複素２次超曲面の二つの実形である球面 S^2 とトーラス T^2 について、対の Floer ホモロジーの計算

（２）３次元以上の複素２次超曲面の（互いにハミルトンアイソトピックとは限らない）二つの実形について、対の Floer ホモロジーの計算

（２）の場合は、実形の最小マスロフ数が３以上になるので、Floer ホモロジーを定義するために実形に境界を持つ正則円盤を分類する必要はない。

また、ラグランジュ部分多様体のハミルトン体積最小性問題への応用については、交点数の評価と Crofton 型公式を用いた積分幾何的な方法を用いる。

４．研究成果

（１）について、当初は C.-H. Cho による複素射影空間内のクリフォードトーラスに境界をもつ正則円盤の分類の手法を参考にラグランジュトーラス T^2 に境界を持つ正則円盤の分類を用いて、S^2 と T^2 の両方に境界をもつ正則な strip を決定し、この場合の Floer 複体の境界作用素を計算した。この研究の過程で２次元の複素２次超曲面のある正則な対合写像を用いると正則円盤の分類を用いず簡明に計算が実行できることに気が付いた。

その後、酒井高司氏（首都大）、田崎氏と議論を行い、この対合写像は対称空間の点対称の写像になっており、研究代表者が考案した計算はより一般の場合にまでそのまま拡張可能であることが判明した。このため、当初の研究計画であった複素２次超曲面の場合を大幅に拡張する形で、単調なコンパクト型エルミート対称空間の二つの実形 L_1 と L_2 に対して Z_2 係数の Floer ホモロジーを計算することができた。

これについてもう少し詳しく述べる。まず、コンパクト型エルミート対称空間の実形の Floer ホモロジーは、標準的な複素構造を用いて計算できるという Oh 氏の先行結果があった。一方、複素２次超曲面の実形の交叉についての田崎氏の結果は、田崎氏と田中真紀子氏（東京理科大学）の研究により、コンパクト型エルミート対称空間 M の場合にまで拡張され、二つの実形 L_1 と L_2 の横断的な交叉は対蹠集合になることがわかっていた (The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in J. Math. Soc. of Japan)。対蹠集合とは、対称空間の点対称に関する固定点からなる有限部分集合である。田中-田崎の結果を利用すると、Floer ホモロジーの境界作用素の構成に必要な正則な strip のモジュライ空間に自由な Z_2 作用が誘導される。したがって、境界作用素が零写像になり L_1 と L_2 の交叉そのものが Z_2 係数の Floer ホモロジーを生成することがわかった。特に、M が既約の場合には L_1 と $\Phi(L_2)$ の交点数の最良評価が得られ、一般化された Arnold-Givental 不等式を導出することができた。これらの例の中で複素グラスマン多様体の二つの実形で、対の Floer ホモロジーが L_1 と L_2 のいずれの Z_2 係数ベッチ数の和よりも小さいものが発見できた。対の Floer ホモロジーが具体的に計算された例は、最近活発に研究されているトーリック多様体以外では数少ない。本研究により対の Floer ホモロジーの具体的計算例が大量に構成できたことは、今後の研究において大変有用であると思われる。

応用として、極小部分多様体論の分野で興味をもたれているハミルトン体積最小性問題（ラグランジュ部分多様体 L をハミルトンアイソトピーによる変形に制限したときの L の体積汎関数の最小値を求める問題）について次の成果を得た。

複素２次超曲面の半分次元の部分多様体に関しては Le Hong Van によって Crofton 型の公式が知られていた。これと一般化された Arnold-Givental 不等式を組み合わせて積分幾何的な議論を行い、複素２次超曲面 M の実形 L をハミルトン変形した $\Phi(L)$ の体積が M に実形として埋め込まれている球面 S^n の体積以上になることが導かれた。特に、その球面はハミルトン体積最小になることがわかった。この結果は、偶数次元の場合には実形 S^n が M 内でキャリブレートされた部分多様体であることが示されている (Gluck-Morgan-Ziller) のでその帰結としても得られる。しかし、奇数次元の場合には新しい結果であり、ラグランジュ部分多様体のハミルトン体積最小性問題に関する Oh の予想の一つの部分的解答も与えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 入江　博，酒井高司，田崎博之，コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対の

Floer ホモロジー，数理解析研究所講究録 1775 (2011)，94-107. 査読無，
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/2012.html

② Hiroshi Iriyeh and Takashi Sakai, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, Geom. Dedicata 145, No. 1 (2010), 1-17. 査読有,
DOI:10.1007/s10711-009-9398-6

〔学会発表〕(計 6 件)

① 入江　博，ラグランジュ部分多様体の交叉とハミルトン体積最小性問題，日本数学会 2012 年度年会 幾何学分科会特別講演，東京理科大学，2012 年 3 月 26 日.
② Hiroshi Iriyeh, Floer homology and Hamiltonian volume minimizing properties of real forms of complex hyperquadric, The 10th Pacific Rim Geometry Conference 2011 Osaka-Fukuoka, Part I, Osaka City University, December 3, 2011.
③ 入江　博，コンパクト型Hermite 対称空間の実形の対のFloer ホモロジーとその応用，第 58 回幾何学シンポジウム 基調講演，山口大学，2011 年 8 月 27 日.
④ 入江　博，コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対の Floer ホモロジー，京都大学数理解析研究所研究集会「部分多様体の微分幾何学的研究」，数理解析研究所，2011 年 6 月 29 日.
⑤ Hiroshi Iriyeh, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, East Asia Symplectic Conference 2011, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, Korea, June 24, 2011.
⑥ 入江　博，酒井高司，田崎博之，コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の対の Floer ホモロジー，日本数学会 2011 年度年会，早稲田大学，2011 年 3 月 20 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

入江　博（IRIYEH HIROSHI）
東京電機大学・未来科学部・准教授
研究者番号：30385489

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし