

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月11日現在

機関番号：32657
 研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2010～2011
 課題番号：22740046
 研究課題名（和文） ディラック型作用素の指数の局所化と特異ラグランジュファイバー束
 研究課題名（英文） A localization technique for indices of Dirac-type operators and singular Lagrangian fibrations
 研究代表者
 吉田 尚彦（YOSHIDA TAKAHIKO）
 東京電機大学・工学部・助教
 研究者番号：70451903

研究成果の概要（和文）：古田幹雄氏、藤田玄氏との共同研究で得られた開 Riemann 多様体上の Dirac 型作用素の局所指数の理論の Lagrangian ファイブレーションの幾何学的量子化への応用について研究した。Lagrangian ファイブレーションのある特異ファイバーについて、局所指数を計算した。また、局所指数の理論をトーラス作用がある場合に精密化し、応用として射影的トーリック多様体の同変 Riemann-Roch 指数に関する Danilov の定理や量子化とシンプレクティック簡約の可換性に関する Guillemin-Sternberg 予想の別証明を Hamiltonian トーラス作用の場合に与えた。

研究成果の概要（英文）：We studied applications of the theory of local indices for Dirac-type operators on open Riemannian manifolds developed by the joint work with Furuta and Fujita to the geometric quantization of Lagrangian fibrations. We computed the local index for a certain type of singular fibers of Lagrangian fibrations. We refined the theory of local indices in the case of torus actions, and, as applications, we reproved Danilov's theorem for the equivariant Riemann-Roch indices of projective toric varieties and the Guillemin-Sternberg conjecture, concerning the commutativity of the quantization and the symplectic reduction, in the case of Hamiltonian torus actions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ディラック型作用素，指数，ウィッテン摂動，局所化，幾何学的量子化，ラグランジュファイバー束，特異ファイバー，Bohr-Sommerfeld ファイバー

1. 研究開始当初の背景

幾何学的量子化とは、古典力学系の相空間を抽象化した概念であるシンプレクティック

多様体に対して、物理学における正準量子化の類似物を幾何学的に構成する手続きである。特に、量子 Hilbert 空間（の対応物）は、シンプレクティック多様体上の前量子化

束の然るべき条件を満たす切断のなす空間として構成される。

幾何学的量子化にはさまざまなものがあるが、ここでは Spin^c 量子化と実偏極を用いた幾何学的量子化という二つの異なる量子化に着目する。 Spin^c 量子化とは、シンプレクティック多様体の Spin^c 構造を利用する量子化で、前量子化束を係数とする Spin^c Dirac 作用素の指数が量子 Hilbert 空間になる。それに対して実偏極を用いた幾何学的量子化は、シンプレクティック多様体が Lagrange ファイブレーションの全空間である場合に適用できる方法で、Bohr-Sommerfeld ファイバーと呼ばれる離散的に現れるファイバーの個数が量子 Hilbert 空間の次元に対応する。

Spin^c 量子化と実偏極を用いた幾何学的量子化の両方を適用できる状況において、これら二つの異なる量子化が同じ結果を与えるという現象が、複素旗多様体や Riemann 面上の平坦 $\text{SU}(2)$ 束のモジュライなど、様々な実例で知られている。これらの現象は、 Spin^c Dirac 作用素の指数が Bohr-Sommerfeld ファイバーに局所化する普遍的な原理の存在を示唆する。これについて、古田幹雄氏（東京大学）、藤田玄氏（日本女子大学）との共同研究において、Bohr-Sommerfeld ファイバーでないファイバーを特徴付ける幾何学的構造を定式化し、コンパクトな部分以外にこのような構造をもつ（閉多様体とは限らない）Riemann 多様体とその上の \mathbb{Z}_2 次数付き Clifford 加群束に対して、Dirac 型作用素の指数を定式化し、切除性、貼り合わせ公式、和公式などの性質が成り立つことを証明した。我々の定式化した指数を局所指数と呼ぶことにする。特に、閉多様体の場合には、局所指数は Dirac 型作用素の通常の意味での指数と一致するという性質があるので、この性質と切除性から指数の局所化公式が得られる。その応用として、いくつかの状況については Spin^c Dirac 作用素の指数が Bohr-Sommerfeld ファイバーに局所化するメカニズムが解明できた。

2. 研究の目的

古田氏、藤田氏との共同研究で得られた局所指数についての研究成果をさらに推し進め、次の研究を行う。

- (1) Lagrange ファイブレーションに特異ファイバーがある場合、これまでの結果を使うと Spin^c Dirac 作用素の指数が Bohr-Sommerfeld ファイバーと特異ファイバーからの寄与で表せることが分かる。そこで今度は、典型的な特異フ

イバーについて、寄与を決定する。さらに、複素旗多様体や Riemann 面上の平坦 $\text{SU}(2)$ 束のモジュライ等の場合に、 Spin^c 量子化と実偏極を用いた幾何学的量子化の関係を指数の局所化の観点から明らかにする。

- (2) コンパクト Lie 群の作用がある場合、局所指数はこの Lie 群の仮想表現になる。これを同変局所指数と呼ぶことにする。このとき、同変局所指数の既約分解に含まれる既約表現の重複度を求める方法を与える。

3. 研究の方法

古田氏、藤田氏との共同研究では、Witten が Morse 不等式を示すために用いた作用素の摂動の無限次元類似を用いた。完備 Riemann 多様体 M とその上の \mathbb{Z}_2 次数付き Clifford 加群束 W に対して、 D を W の Dirac 型作用素、 h を Clifford 積と反可換な W の次数 1 の Hermite 自己準同型でサポートがコンパクトなものとする。このとき、 $0 < t$ に対して摂動 $D_t = D + th$ を考えると、 t が十分大きければ D_t の指数を定義することができるというのが Witten による摂動のアイデアである。これは、 t が十分大きければ D_t の Laplacian の固有関数は h のサポート以外では急減少するという事実から従う。

Lagrange ファイブレーションの幾何学的量子化の状況では、Lagrange ファイブレーションのファイバーが Bohr-Sommerfeld であるという条件は、“ファイバーの de Rham 作用素の核が非自明”という条件で特徴付けることができる。古田氏、藤田氏との共同研究では、Witten による摂動項 h の代わりにファイバーに沿った de Rham 作用素（ファイバーの de Rham 作用素をすべてのファイバーについて束ねたもの）を用いて Spin^c Dirac 作用素を摂動する。

本研究では、この方法をそれぞれ次の様に発展させる。

- (1) 楕円型や nodal 型特異ファイバーの近傍の局所モデルを用いて、 Spin^c Dirac 作用素の指数の特異ファイバーからの寄与を直接計算する。これがうまくいかない場合は、局所指数の積公式を用いて寄与の計算をファイバーの次元が小さい場合に帰着させる。
- (2) まずは局所指数について、2次元シリンドラーや2次元円盤などの簡単な例で得られた結果を、トーラス作用がある場合に精密化する。その後、局所指数の積公式をトーラス作用のある場合に

精密化し、それを用いて同変局所指数の既約分解に含まれる既約表現の重複度を求める。

4. 研究成果

(1) 球面の余接束には、測地流から誘導される特異 S^1 束の構造が入る。この特異 S^1 束の特異ファイバーは、ゼロ切断である。そこで、ゼロ切断の近傍での局所指数を計算した。この例は複素旗多様体上のGelfand-Cetlin系に現れる特異ファイバーの局所モデルであり、局所指数の理論をこの場合に適用する上で必要かつ基本的な結果である。

(2) これまで得られた局所指数の理論を、コンパクトLie群の作用がある場合に精密化した。特にトーラスが作用する場合には、同変局所指数の作用で不変な部分についての局所化公式を得た。Hamiltonトーラス作用の場合、局所指数は de Rham作用素の核が非自明である軌道の近傍からの寄与の和として記述することができる。それに対して、今回得られた局所化公式では、同変局所指数の作用に関する不変部分は de Rham作用素の核のトーラス作用に関する不変部分が非自明であるような軌道の近傍からの寄与の和として記述される。

今回の結果の応用として、シンプレクティック簡約と量子化が可換であることを主張するGuillemin-Sternberg予想の別証明を、Hamiltonトーラス作用の場合に得た。この結果は論文「Torus fibrations and localization of index III」にまとめ、査読付き学術雑誌に投稿中である。また、e-print arXivや東京大学大学院数理科学研究科のプレプリントシリーズでも公開している。

さらに、この結果をトーリック多様体の場合に適用することによって、同変Riemann-Roch指数の既約分解を付随する凸多面体の組み合わせ的データで記述するDanilovの定理の別証明を得た。

Hamilton S^1 空間のシンプレクティックカットにおいて、cut-locusとして現れるシンプレクティック部分多様体の同変局所指数を計算する公式を与えた。

上記以外に、次のことも行った。

(3) 局所指数は、acyclic compatible systemという幾何構造に依存する。acyclic compatible systemの取り方によっては、局所指数が簡単に計算できる場合がある。そこで、2次元シリンダー上の2通りのacyclic compatible systemについて、対応する局所指数が等しくなるための条件を考察した。

この研究の目的のうち、(2)については完全解決には至らなかったが、順調に研究成果をあげることができた。(1)については、まだ解決すべきことが残されている。全体としては、おおむね順調に進展していると評価する。今後の目的は、これまでに得られた理論の応用である。そのために必要となるのが、局所指数を組織的に計算する方法である。これまでに得られた結果を扱いやすいものに整備する必要もあるかもしれない。閉多様体上の楕円型作用素に対するAtiyah-Singerの指数定理やその様々な方面への一般化を参考にすると、解析的指数である局所指数のK理論的定式化や位相的指数の対応物についての研究が今後の一つの方向性と考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① 吉田尚彦, Equivariant local index, RIMS Kokyuroku Bessatsu に掲載予定, 査読有.
- ② 吉田尚彦, Equivariant local index, MIMS Technical Report 00037 (2011), 査読無.
<http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/2011/abst00037a.pdf>
- ③ 吉田尚彦, Local torus actions modeled on the standard representation, Adv. in Math. 227 (2011), no. 5, 1914-1955, 査読有.
DOI: 10.1016/j.aim.2011.04.007
- ④ 藤田玄, 古田幹雄, 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index III, UTMS Preprint Series 2010-11, 査読無.
<http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/users/preprint/pdf/2010-11.pdf>
- ⑤ 吉田尚彦, RR=#BS via localization of index, Trends in Math. 12 (2010), no. 1, 1-41, 査読無.

- ⑥ 吉田尚彦, RR=#BS via localization of index, MIMS Technical Report 00029 (2010), 査読無.
<http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/2010/abst00029.pdf>
- ⑦ 藤田玄, 古田幹雄, 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index I, J. Math. Soc. Univ. Tokyo 17 (2010), no. 1, 1-26, 査読有.

[学会発表] (計 10 件)

- ① 吉田尚彦, Equivariant local index, Toric Topology 2011 in Osaka, 大阪市立大学, 2011 年 11 月 30 日.
- ② 吉田尚彦, Equivariant local index, The fourth International Conference on Geometry and Quantization, 南開大学 (中国), 2011 年 9 月 13 日.
- ③ 吉田尚彦, Equivariant local index, International Conference "Toric Topology and Automorphic Functions", Pacific National University (ロシア), 2011 年 9 月 8 日.
- ④ 吉田尚彦, Equivariant local index, Geometry of Transformation Groups and Combinatorics, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 6 月 14 日.
- ⑤ 吉田尚彦, Equivariant local index and quantization conjecture, Toric Geometry, Toric Topology, and Combinatorics, 大阪市立大学, 2010 年 12 月 3 日.
- ⑥ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, The International Conference "Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications", Steklov Mathematical Institute (ロシア), 2010 年 8 月 19 日.
- ⑦ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 第 57 回幾何学シンポジウム, 神戸大学, 2010 年 8 月 7 日.
- ⑧ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 非可換幾何と数理物理, 慶応義塾大学, 2010 年 7 月 1 日.
- ⑨ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, Workshop on Toric Topology and Related Topics, 復旦大学 (中国), 2010 年 5 月 3 日.
- ⑩ 吉田尚彦, Torus fibrations and localization of index, 微分トポロジーセミナー, 京都大学, 2010 年 4 月 20 日.

[その他]

アウトリーチ

明治大学大学院 研究科横断型カリキュラム プロジェクト系科目 Advanced Mathematical Sciences C "Mathematics Everywhere" (コーディネーター: 三村昌泰教授) にて講演 (講演題目: Geometric methods in Quantization), 明治大学, 2011 年 7 月 22 日.

ホームページ

<http://www.isc.meiji.ac.jp/~takahiko/>

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
 吉田 尚彦 (YOSHIDA TAKAHIKO)
 東京電機大学・工学部・助教
 研究者番号: 70451903
- (2) 研究分担者
 なし
- (3) 連携研究者
 なし