

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月27日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740047

研究課題名（和文） ラリタ・シュウィンガー作用素を用いたスピノ幾何学の開発

研究課題名（英文） Development of spin geometry with the Rarita-Schwinger operators

研究代表者

本間 泰史（HOMMA YASUSHI）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：50329108

研究成果の概要（和文）：

スピノ幾何学とはディラック作用素とスピノールを用いて多様体の性質を調べる分野である。本研究の目的は、ラリタ・シュウィンガー作用素を用いてスピノ幾何学を開発し、ディラック作用素の場合との類似性・相違性を調べることである。次のような研究成果を得た。

- (1) 3次元ハイゼンベルグ多様体上のラリタ・シュウィンガー作用素のスペクトルの振る舞い
- (2) いくつかの3次元多様体上のディラック作用素に対するエータ関数及びその特殊値（共同研究による）

また、ラリタ・シュウィンガー作用素を用いた幾何学を開発するためのいくつかのアイデアを得た。

研究成果の概要（英文）：

The Dirac operators and spinors are important geometrical tools to investigate differential manifolds. Such a field in mathematics is called “spin geometry”. The purpose of this project is that we develop spin geometry with the Rarita-Schwinger operators instead of the Dirac operators. We have the following results:

- (1) Some properties of spectra of the Rarita-Schwinger operator on the 3-dim Heisenberg manifold.
- (2) Eta-functions and their special values for the Dirac operators on some 3-dim manifolds (by joint work).

Besides, we found some ideas to develop spin geometry with the Rarita-Schwinger operators.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2010年度 | 600,000 | 180,000 | 780,000 |
| 2011年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 2012年度 | 500,000 | 150,000 | 650,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 1,600,000 | 480,000 | 2,080,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学、スピノ幾何学、ディラック作用素、ラリタ・シュウィンガー作用素

1. 研究開始当初の背景

ディラック作用素は相対論的電磁気学のために導入された作用素であり、スピン $1/2$ のスピノール場に作用する楕円型一階微分作用素である。スピンを $3/2$ に上げたスピノール場に作用する楕円型一階微分作用素をラリタ・シュウィンガー (Rarita-Schwinger) 作用素とよぶ。ディラック作用素が光子を表すのに対して、ラリタ・シュウィンガー作用素は重力子を表す方程式として理論物理学で登場するものである。

ディラック作用素やスピノールに関して数学または物理学の立場から様々な研究が行われてきた。このような分野は「スピン幾何学」と呼ばれ現在も発展している。そして、ツイスター理論、サイバークウイッテン理論、キリングスピノールや平行スピノール、指数定理、調和解析学など、様々な幾何学・大域解析学と交差する分野である。一方、ラリタ・シュウィンガー作用素等のスピンを $1/2$ より高くした微分作用素については、T. Branson, D. Eelbode らにより調和解析学的視点から研究が行われてきたが、幾何学の立場からは目立った結果が得られていなかった。

2. 研究の目的

上記の背景で述べたように、ディラック作用素に比べ、ラリタ・シュウィンガー作用素を用いた幾何学はこれまで発展してこなかった。これは、ディラック作用素と異なり、ラリタ・シュウィンガー作用素は2乗してもラプラス作用素とならないことや、スピノール場のように記述が簡単でないことに起因している。しかし、研究代表者が開発したワイゼンベック公式などが成立することが知られており、ディラック作用素との類似点も多い。

そこで、本研究ではディラック作用素の次に簡単な幾何学的楕円型一階微分作用である「ラリタ・シュウィンガー作用素」の性質を明らかにし、ディラック作用素との類似点・相違点を様々な視点から調べ、スピン幾何学の一般化となるスピン $3/2$ の幾何学を構築することが目的である。具体的には次のよう：

- (1)多項式解の幾何学的な構成
- (2)基本解や熱核の構造
- (3)キリングスピノールなどの特殊スピノールの一般化
- (4)ケーラー構造、四元数ケーラー構造などの幾何構造をもつ場合のラリタ・シュウィンガー作用素の性質

以上のことを研究することで、新しいスピン幾何学を開発し、その方向性を探る。

3. 研究の方法

(1) 平成22年度

3次元ハイゼンベルグ多様体上のラリタ・シュウィンガー作用素のスペクトルを具体的に計算し、ディラック作用素のスペクトルとの比較を行った。類似点として計量を変形していけば零固有空間の次元を任意に大きくとることができることを示した。以上の研究成果を「幾何学阿蘇研究集会」にて発表した。この研究と並行して、3次元ハイゼンベルグ多様体上のエータ関数に関する共同研究を行った。

また「非可換幾何と数理物理2010」の世話人を務め、講演者・参加者らと議論を行った。

(2) 平成23年度

平成22年度に引き続き3次元ハイゼンベルグ多様体上のディラック作用素・ラリタ・シュウィンガー作用素の固有値及びエータ関数についての研究を行った。さらに、ラリタ・シュウィンガー作用素の多項式解の構成、対称空間上での高次カシミール作用素との関連性、ケーラー多様体上でアナロジー等の研究を行った。

また、研究集会「量子化の幾何学2011」を開催し、講演者・参加者らと議論を行った。

(3) 平成24年度

平成23年度の研究に引き続き、エータ関数に関して共同研究を行った。特に、3次元ハイゼンベルグ多様体および3次元レンズ空間上においてディラック作用素の固有値から直接エータ関数を計算し、いくつかの特殊値を与えることに成功した。これらの研究成果について、現在論文執筆中である。

また、研究会「非可換幾何と数理物理2012」の世話人を務め、講演者・参加者らと議論を行った。

4. 研究成果

本研究課題の目的は、ディラック作用素とラリタ・シュインガー作用素の類似点、相違点を調べ、ラリタ・シュインガー作用素を用いた新しい微分幾何学の方向性を探ることである。次に述べるように、いくつか研究成果を得た。また、新しいスピノ幾何学を開発するためのアイデアを得ることができた。

- (1) C. Bär らによりディラック作用素のスペクトルとリーマン計量の関係が研究されてきた。ラリタ・シュインガー作用素についても同様のことを考察することは興味深い。しかし、ラリタ・シュインガー作用素のスペクトルを求めることは困難であり、知られている結果は球面（または球面の積）に対するスペクトルのみである。そこで、3次元ハイゼンベルグ多様体上のスペクトルを計算した。そして、ディラック作用素と同様に計量を変形すれば、零固有空間の次元を任意に大きくできることを示した。特に、零固有空間の次元は微分位相不変量ではないことがわかる。一方で、ディラック作用素との相違点もあることがわかった。ディラック作用素の場合には、多様体を崩壊させると再びディラック作用素が現れるが、ラリタ・シュインガー作用素の場合には微分作用素が分解する。よって、固有値についても分解した挙動を調べる必要がある。この状況は境界付き多様体上で考えた場合にも起こる。しかし、完全な記述を現段階では得ることができていない。これらを解明することは解析学的観点からも極めて重要であり、今後の課題である。
- (2) 奇数次元のスピノ様体上で、ディラック作用素に対する固有値からエータ関数を定めることができる。これはスペクトル不変量と呼ばれ、エータ関数の零での値は、指数定理やチャー・サイモンズ理論などの場面で重要である。エータ関数を具体的に計算することは一般には困難であり、いくつかの例しか知られていない。本研究において、3次元ハイゼンベルグ多様体および3次元レンズ空間に対して、具体的かつ直接的な計算を行った。そして、いくつかの特殊値および留数を求めることに成功した。エータ関数の特殊値がどのようにリーマン計量や位相構造に依存しているかを直接理解でき、幾何学において貴重な結果となりうるものである。今回得られた結果を足掛かりに、留数がどのような幾何学的な意味を持つかを今後解明すべき

である。このエータ関数に関する結果は、研究代表者、楯辰哉氏、宮崎直哉氏との共同研究によるものであり、研究成果について論文執筆中である。

- (3) D. Eelbode らのここ数年の研究結果から、ラリタ・シュインガー作用素に対するいくつかの性質が明らかになった。それらの結果をもとに幾何学的なアプローチを試み、ラリタ・シュインガー作用素を用いた幾何学を構築するためのいくつかのアイデアを得た。例えば、次である：
 - ①ユークリッド空間上の多項式解の表示に対して、幾何学・表現論の視点から構成を試みた。いくつかの結果を得ることができたが、まだ不完全な部分が多い。また、高次カシミア作用素が鍵となることが理解できた。
 - ②ユークリッド空間上のラリタ・シュインガー作用素に対し、ある3階微分作用素を合成するとラプラス作用素の2乗となることが知られている。曲がった空間の場合に、3階微分作用素をどう定義するか、また、どのような曲率項が現れるかについて研究を行い、いくつかのアイデアを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[研究会発表] (計2件)

- (1) 本間泰史「ディラック作用素などの幾何学的一階微分作用素の話」
関東若手幾何セミナー2012年12月20日
首都大学東京
- (2) 本間泰史「The Rarita-Schwinger operator (spin 3/2 Dirac operator) について」
幾何学阿蘇研究集会 2010年8月31日
休暇村南阿蘇

[その他]

研究集会開催 (代表者または世話人)

- (1) 研究集会「非可換幾何と数理物理 2012」
慶応大学 2012年9月14、15日
- (2) 研究集会「量子化の幾何学 2011」
早稲田大学 2011年11月18、19日
- (3) 研究集会「非可換幾何と数理物理 2010」
慶応大学 2010年7月1、2日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

本間 泰史 (HOMMA, Yasushi)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 50329108