

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 8日現在

機関番号：33919

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740048

研究課題名（和文） 自明な結び目を識別する結び目不変量の表現論的構造解析

研究課題名（英文） Research on representation theoretic structures of unknot detectors

研究代表者

長郷 文和（NAGASATO FUMIKAZU）

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号：30513634

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、自明な結び目を識別する指標多様体（character variety）の構造が本質的に結び目群のどの様な  $SL_2(\mathbb{C})$ -表現に由来しているのかを追及し、以下の成果を上げることができた。第1の成果として、trace-free 断面の幾何構造を完全に記述する trace-free 断面の方程式族を決定した。これにより、abelian knot contact homology の次数0の部分の表現論的特徴付けが可能となった。第2の成果として、2橋結び目に対し、指標多様体の既約性の判定法を、非常に初等的な方法により記述し、結び目群の順序に関する最小元のいくつかを決定した。

研究成果の概要（英文）：This study is concerned with researches on representation theoretic structures of unknot detectors. In particular, we focus on the geometric structures on the algebraic subset  $S_0(K)$  of the character variety  $X(K)$  defined by trace-free condition. In the researches, we found a family of polynomials whose zero-locus gives the set  $S_0(K)$ . Applying the polynomials, we found a filtration of  $S_0(K)$  each of whose filters gives a knot invariant. This fact reveals a relationship between  $S_0(K)$  and the abelian knot contact homology. The methods used in these researches can be also applied to determine some minimal elements for a partial ordering of prime knots.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目, 結び目群, character variety, Chebyshev 多項式, trace-free 表現

### 1. 研究開始当初の背景

2000年代に入り、結び目不変量の表現論的な研究視点が重要視され始め、低次元トポロジー、特に結び目理論において、その視点は様々な突破口を見出してきた。特に、指標多様体 ( $SL_2(\mathbb{C})$ -character variety) を用いた結び目不変量の研究は、自明な結び目を識別する結び目不変量 (unknot detectors) の発見に大きな影響を及ぼしている。

例えば、非自明な結び目に対し、その結び目群の既約  $SL_2(\mathbb{C})$ -表現が本質的に無限個存在することがゲージ理論により示されたことにより、A-多項式 (A-polynomial) とよばれる結び目の多項式不変量が unknot detector であるという事実が示されたことは非常に重要な研究結果である (Boyer と Zhang, Dunfield と Garoufalidis の結果を参照)。

また、コバノフホモロジー (Khovanov homology) とよばれる結び目のホモロジー不変量と、結び目群のトレースフリーな  $SU(2)$ -表現 (trace-free, trace がゼロ) がなす代数的集合との類似性の研究を進展させることで、コバノフホモロジーが unknot detector であることを証明した Kronheimer と Mrowka の結果も非常に興味深いものである。

しかし、指標多様体のどの様な表現論的構造が、自明な結び目を識別しているのか、その本質的な部分は、結び目の外部空間がある幾何構造を許容する場合以外には、明確になっておらず、その本質はゲージ理論に隠れてしまっている。また、上記の幾何構造を許容する場合に関しても、その本質的構造は、結び目群 (knot group) の性質に由来するもので、表現論的視点から見れば「忠実な表現」というだけに過ぎず、結び目のトポロジーと表現の相性については、詳しく考察することができていない状況である。

### 2. 研究の目的

上記の背景を踏まえ、本研究では、結び目の非自明性を識別する結び目不変量、特に指標多様体について、その構造が本質的に結び目群のどの様な  $SL_2(\mathbb{C})$ -表現に由来しているのかを追及することを目的として、2010年度より研究を推進してきた。

### 3. 研究の方法

主な研究方法として、背景にも述べたように、指標多様体とその幾何学構造、指標多様体に関係する結び目不変量の性質を詳しく調べることが基本的であると考え、その方針に従って研究を推進した。

まず、結び目  $K$  の構造を、 $SL_2(\mathbb{C})$ -表現を

用いて代数的に実現した指標多様体  $X(K)$  に対し、trace-free 方程式 (trace-free 条件, trace がゼロという条件) により  $X(K)$  を切断し、それにより得られる断面  $S_0(K)$  を用いて  $X(K)$  の構造を調べる。より具体的に、断面  $S_0(K)$  とは以下の様に構成される  $X(K)$  の代数的部分集合である。

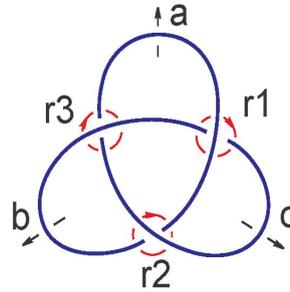


図1：三様結び目の Wirtinger 表示

結び目群  $G(K)$  に対し、その Wirtinger 表示 (三葉結び目  $3_1$  については図1を参照) を用いて、 $SL_2(\mathbb{C})$  への表現  $\rho$  を構成する。このとき、すべての表現はトレース恒等式 (trace identity) により、いくつかの多項式の共通零点として表わされる。この零点集合を  $X(K)$  と表し、結び目  $K$  の指標多様体 (character variety) とよぶ。

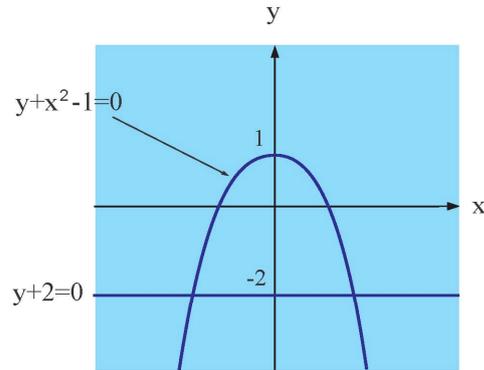


図2： $X(3_1)$  の実平面上のグラフ

例えば、三様結び目  $3_1$  の場合、トレース恒等式から  $X(3_1)$  は

$$(y+2)(y+x^2-1)=0$$

の解として表わされる (図2参照)。但し、 $x = -\text{trace}(\rho(a))$ ,  $y = -\text{trace}(\rho(ab^{-1}))$  とする。

ここで、メリディアン (meridian) とよばれる結び目群の元が常にとれるが、メリディアンがすべてトレースフリー (トレースが

0, trace-free)な行列に表現される表現をすべて考える. これは,  $X(3_1)$ においては, 超平面  $x=0$  (即ち  $y$  軸) により,  $X(3_1)$ を切断して得られる断面に対応している. この様にして得られる  $X(K)$ の断面のことを  $S_0(K)$ と表す.  $S_0(3_1)$ は 2 点のみからなることが, 計算により確認できる (図 3 参照).

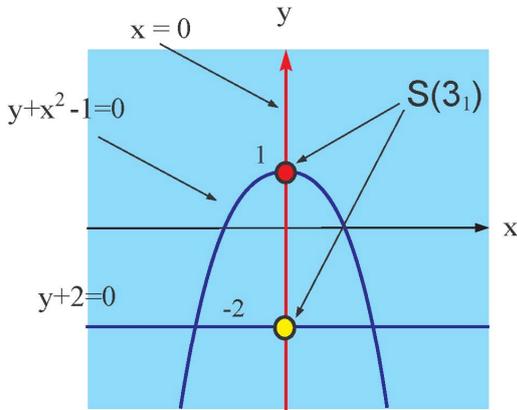


図 3 :  $S(3_1)$ の実平面上のグラフ

#### 4. 研究成果

①研究代表者らの以前の研究から, 結び目群  $G(K)$ に対する指標多様体  $X(K)$ の trace-free 断面  $S_0(K)$ は, 3次元球面の結び目  $K$ に沿って分岐する 2 重分岐被覆  $\Sigma_2(K)$ の基本群に対する指標多様体の中への 2 対 1 写像  $\Phi$ をもつ. そこで, この 2 重分岐被覆的構造を誘導する本質的構造を探るため,  $S_0(K)$ を代数的集合として記述する多項式族を決定した.

②①の研究成果を用いると, abelian knot contact homology の次数 0 の部分  $HC_0(K)$ が, 2 重分岐被覆的構造をもつ断面  $S_0(K)$ の底空間の双対になることがわかった.

③②の結果から,  $HC_0(K)$ により誘導される代数多様体上の点で断面  $S_0(K)$ にリフトしないものがある場合, ①の  $\Phi$ は全射にならない. この全射性の障害となる点を幻指標 (ghost character)と名付けた. 現在, 幻指標の存在性について研究を進めている.

④上記の研究に用いられたアイデアから, 特に, ある種の 2 橋結び目  $K$ に対しては, 指標多様体  $X(K)$ 自体の構造をチェビシエフ多項式 (Chebyshev polynomial) を用いて記述することができた. これにより, 指標多様体の既約部分の既約性を初等的に判定することができるようになった. その応用として, ある種の 2 橋結び目が, 結び目群の順序に関して最小元であることを示すことができた.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

①Fumikazu Nagasato,  
*On the trace-free characters*,  
RIMS Kokyuroku に掲載予定, 査読なし.

②Fumikazu Nagasato,  
*On minimal elements for a partial order of prime knots*,  
Topology and its Applications, Vol.159,  
pp.1059-1063 (2012), 査読あり.

③Fumikazu Nagasato, Yoshikazu Yamaguchi,  
*On the geometry of the slice of trace-free  $SL(2, C)$ -characters of a knot group*,  
Mathematische Annalen, Vol.354,  
pp.967-1002 (2012), 査読あり.

④Fumikazu Nagasato,  
*On the character rings of twist knots*,  
Bulletin of the Korean Mathematical Society, Vol.48, No.3, pp.469-474 (2011), 査読あり.

[学会発表] (計 6 件)

①Fumikazu Nagasato,  
*On the trace-free characters of knot groups*,  
UCSB Topology Seminar, University of California, Santa Barbara, October 31, 2012.

②Fumikazu Nagasato,  
*On trace-free characters and abelian knot contact homology*,  
RIMS Seminar 『Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds』 Gora Seiunso, May 28-June 1, 2012.

③長郷 文和,  
*On the space of colorings of a knot*,  
研究会「2012 琉球結び目セミナー」, 那覇市伝統工芸館, 2012年9月3日.

④長郷 文和,  
*On minimal elements for a partial order of prime knots*,  
九州大学トポロジーセミナー, 九州大学, 2012年2月23日.

⑤長郷 文和,

*On metabelian representations and their applications,*

研究会「2011 琉球結び目セミナー」, 那覇市伝統工芸館, 2011年9月7日.

⑥Fumikazu Nagasato,

*On minimal elements for a partial order of prime knots,*

International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, Universidad de Colima, Mexico, September 28, 2010.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://ccmath.meijo-u.ac.jp/~fukky/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長郷 文和 (NAGASATO FUMIKAZU)

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号: 30513634

### (2) 研究分担者

該当なし

### (3) 連携研究者

該当なし