

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740051

研究課題名(和文)代数的位相幾何学の手法によるシューベルトカルキュラスの研究

研究課題名(英文)Schubert calculus from algebraic topological viewpoint

研究代表者

鍛冶 静雄(KAJI, Shizuo)

山口大学・理工学研究科・講師

研究者番号：00509656

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、シューベルトカルキュラスにおけるいくつかの問題に対して、代数的位相幾何学で培われてきた強力な計算手法を用いて具体的な考察を行った。特に先行研究の少ない例外型旗多様体を含めて、そのコホモロジー環を統一的に扱う方法を与えた。また旗多様体の一つの一般化として、ある種のコンパクトリー群の作用をもつ多様体に対して、シューベルトカルキュラスのアナロジーを展開した。

研究成果の概要(英文)：Some problems in Schubert calculus are studied from algebraic topological viewpoint. A type-uniform treatment for the torus equivariant cohomology ring of the flag varieties including exceptional ones is given. A generalisation of Schubert calculus to a class of manifolds with good Lie group actions is also obtained.

研究分野：代数的位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー リー群 シューベルトカルキュラス 旗多様体

1. 研究開始当初の背景

シューベルトカルキュラスは旗多様体のコホモロジー環を、幾何と組み合わせ論の両方の立場から研究する分野である。本研究では、シューベルトカルキュラスにおけるいくつかの問題に対して、代数的位相幾何学で培われてきた強力な計算手法を用いて具体的な考察を行うことを目標とした。特に先行研究の少ない例外型旗多様体を扱う事を主眼とした。

2. 研究の目的

本研究の主な対象である旗多様体は、リー群の放物部分群による等質空間として定義される。対応するリー群の分類に従って、古典型旗多様体、例外型旗多様体と呼ぶ。旗多様体はグラスマン多様体の一つの自然な一般化であり、Plucker 埋め込みにより射影多様体の構造を持つほか、リー環内の随伴軌道とみなすことで isoparametric 多様体、シンプレクティック多様体の典型例ともなっている等、豊かな幾何学的構造を持っている。旗多様体の位相不変量を計算する事は、これらの構造の持つ性質を知る為の手がかりとなる。シューベルトカルキュラスでは、位相不変量と組み合わせ論との対応を考察する事が目標であるが、本研究はそこに代数的位相幾何学の強力な道具立てを導入する事を目指した。

3. 研究の方法

研究を進める上の道具立てとして、分類空間のコホモロジー、ワイル群の不変式、コホモロジー作用素、スペクトル系列などのスタンダードな手法に加えて、GKM 理論を主に用いた。GKM 理論は、トーラス作用による良い対称性を持つ空間のコホモロジーを、グラフの言葉で記述することを可能とする。この研究では、旗多様体のコホモロジー環を、GKM 理論を用いて組合わせ論的に記述することで、対応するワイル群の構造から調べた。また計算機で実行可能なアルゴリズムを開発し、数式処理システムを援用して研究を行った。

4. 研究成果

旗多様体には、ワイル群(の部分集合)でパラメトライズされる、シューベルト多様体と呼ばれる部分多様体族が定義される。旗多様体を線型空間列のなすモジュライ空間と見ると、シューベルト多様体は例えば、 $\mathbb{C}P^1$ と

れた直線と交わる直線全体"といったいわゆるシューベルト条件を満たす部分空間に対応しているため、それらの交叉は複数の条件を同時に満たす部分空間に相当し、シューベルト多様体の交叉理論を考えることは、古典的な数え上げ幾何の現代的枠組みを与えている。シューベルトカルキュラスの主目的は、シューベルト多様体の交叉積を、パラメーター集合であるワイル群の離散的性質に対応させることである。さらには、そうして離散的な対象に帰着された問題に対し、具体的なアルゴリズムを考案することも応用上重要である。シューベルト多様体の基本類であるシューベルト類は、旗多様体のコホモロジーを自由加群として生成する。その環構造を調べるにあたって最も有力な方針は、まずコホモロジー環を多項式環の剰余環として表示し、その中でシューベルト類を代表する多項式、シューベルト多項式を与えるというものである。

論文 [Equivariant Schubert calculus of Coxeter groups] では、例外型を含めた旗多様体に対して、(同変)シューベルト多項式を与える公式を見つけた。これは A 型の場合の二重シューベルト多項式の、型に依らない統一的な拡張となっている。またそれを用いて、特殊な(同変)シューベルト類の間の積を計算する、シュバレー公式の拡張を与えた。

旗多様体は、対応するリー群のかけ算による作用を持つ。それを極大トーラスに制限した作用は、旗多様体を随伴軌道と見なして自然に入るシンプレクティック多様体の構造に対して、ハミルトニアン作用と呼ばれる良い性質をもつ。特に GKM 条件を満たす GKM 多様体というクラスに含まれる。

論文 [Weyl group symmetry on the GKM graph of a GKM manifold with an extended Lie group action] においては、シューベルトカルキュラスの旗多様体以外への拡張として、GKM 多様体であり、その作用がコンパクトリー群へ拡張するような多様体のクラスを考察した。特に、その同変コホモロジーに組合わせ論的な表示を与えた。またトーリック多様体の特性多様体のアナロジーを、グラフ理論の言葉を用いて組合わせ論的にあたえ、その応用として、GKM 多様体のトーラス作用が、コンパクトリー群の作用に拡張するための必要条件を与えた。

これらの成果に関連して、旗多様体の(同変)コホモロジーを GKM 理論を用いて具体的に計算するアルゴリズムを考案し、プログラムを開発した。

またリー群の計算機科学への応用も考察し、特にコンピューターグラフィックスにおける形状変形の問題に対していくつかの応用

を与えた。この成果は論文 [Mathematical Analysis on Affine Maps for 2D Shape Interpolation] および [Anti-commutative Dual Complex Numbers and 2D Rigid Transformation] などで発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Shizuo KAJI, Weyl group symmetry on the GKM graph of a GKM manifold with an extended Lie group action, to appear in Osaka Journal of Mathematics. 印刷中、査読有

G. Matsuda, S. Kaji, and H. Ochiai, Anti-commutative Dual Complex Numbers and 2D Rigid Transformation, to appear in Proceedings of MEIS2013 (Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 2013). 印刷中、査読有

S.Kaji, S.Hirose, S.Sakata, Y.Mizoguchi, and K.Anjyo, Mathematical Analysis on Affine Maps for 2D Shape Interpolation, Proceedings of SCA2012 (ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation 2012), pp. 71--76. 査読有

Koji Nuida, Takuro Abe, Shizuo Kaji, Toshiaki Maeno, Yasuhide Numata, A mathematical problem for security analysis of hash functions and pseudorandom generators, Proceedings of IWSEC 2011, LNCS 7038, November 2011, pp.144--160. 査読有

Shizuo Kaji, Equivariant Schubert calculus of Coxeter groups, Proc. Stekelov. Inst. Math, vol 275, 239--250. 2011. 査読有

Shizuo Kaji, Schubert calculus, seen from torus equivariant topology, Trends in Mathematics - New Series, Volume 12, no.1, 71--90, 2010. 査読有

[学会発表](計 18 件)

Shizuo KAJI, An Application of Lie

theory to Computer Graphics, Applied Topology, Banach center, Bedlewo (ポーランド), July 25th 2013.

Shizuo KAJI, Cohomology of a GKM graph with symmetry, Toric Topology 2012 in Osaka, Osaka city university (大阪市), Nov. 18th 2012.

Shizuo KAJI, 数学がつなぐカタチ - 幾何学的な形状補間法 -, CEDEC2012, Pacifico Yokohama (横浜市), Aug. 20th 2012.

Shizuo KAJI, The equivariant cohomology of a manifold with a G-action, Topology of Mapping space and around, Okinawa Senin Kaikan (那覇市), May 14th 2012.

Shizuo KAJI, Schubert calculus for G-manifolds, International Conference Toric Topology and Automorphic Functions, Pacific National University, Khabarovsk(ロシア), Sep. 9th. 2011.

Shizuo KAJI, Equivariant Schubert calculus of Coxeter group, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, Colima(メキシコ), September 27 - October 1st, 2010.

Shizuo KAJI, Equivariant Schubert calculus of Coxeter group $I_2(m)$, The International Conference "GEOMETRY, TOPOLOGY, ALGEBRA and NUMBER THEORY, APPLICATIONS" dedicated to the 120th anniversary of Boris Delone, Moscow(ロシア), Aug. 19th, 2010.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：

権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://skaji.org/home/publications>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鍛冶 静雄 (KAJI, Shizuo)
山口大学・理工学研究科・講師
研究者番号：00509656

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：