

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 19 日現在

機関番号：37116

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740052

研究課題名(和文) 強自明性を持つ結び目の研究

研究課題名(英文) study of knots with strong triviality

研究代表者

鳥巢 伊知郎 (TORISU, Ichiro)

産業医科大学・医学部・准教授

研究者番号：50323134

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：結び目や絡み目の間の隣接性および強自明性について詳しく研究を行った。幾何学的な議論と代数的な議論の両方を用いることにより様々な新しい知見が得られた。特に、2橋結び目やモンテシノス結び目あるいはトーラス結び目の場合に従来の研究からの著しい拡張が得られた。分岐被覆空間などの3次元多様体論との関係から、3次元トポロジーにおける隣接性と強自明性の役割を明確にすることができた。

研究成果の概要(英文)：I studied adjacency relation and strong triviality for knots or links. I got many results by using both geometrical and algebraic arguments. Especially, I extend known results of 2-bridge knots, Montesinos knot, and torus knots. By 3-manifold theory (for example, branched covering), I found the role of study of adjacency and strong triviality in 3-dimensional topology.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目 絡み目 隣接性 強自明性 2橋結び目

1. 研究開始当初の背景

結び目とは3次元空間内に埋め込まれた円周のことであり、絡み目とは3次元空間内に埋め込まれた二つ以上の円周のことである(図1)。結び目や絡み目を調べる分野が結び目理論であり、結び目理論は低次元位相幾何学の中心的な位置を占めている。図1における結び目と絡み目は三葉結び目と8の字結び目およびホップ絡み目である。これらは特に基本的な結び目や絡み目であることが知られている。

近年はヘガードフレア-ホモロジー等の強力な解析的ともいえる不変量が低次元位相幾何学および3次元接触多様体論に大きな影響を与えていた。そのような中で地道に結び目のダイアグラムを一つ一つ丹念に調べる方向で当該研究を行うことを計画した。

結び目理論において重要な概念に Vassiliev 不変量というものがある。一般に、位数が n 以下の Vassiliev 不変量が全て自明な結び目の値と同じになる結び目は n -自明と呼ばれる。全ての自然数 n で n -自明な結び目は自明な結び目だけであるかという問題は結び目理論における有名な未解決問題である。 n -自明の定義は次のように結び目図式を用いて述べることができる。

定義1: 結び目が n -自明であるとは、その結び目のある結び目図式の中に交点の集合 S_i の $n+1$ 個の互いに交わらない集合 $\{S_1, S_2, \dots, S_{n+1}\}$ が存在して、その任意の空でない組み合わせ(例えば S_1 と S_3 など)の場所で一斉に同時交差変換した結果が全て自明な結び目を表すことをいう。

定義は一見複雑であるが、単純なひねりをいくつもいれることにより自明な結び目は全ての自然数 n で n -自明であることが容易にわかる。そして定義1において各 S_i を1点の交点にしたものが強 n -自明の定義となる。すなわち

定義2: 結び目が強 n -自明であるとは、その結び目のある結び目図式の中に $n+1$ 個の交点の集合 $\{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}\}$ が存在して、その任意の空でない組み合わせ(例えば p_1 と p_2 と p_3 など)の場所で一斉に同時交差変換した結果が全て自明な結び目を表すことをいう。

定義により明らかに強 n -自明であれば n -自明であり、さらに自動的に強 $(n-1)$ -自明になる。そして、 n が1以上としたとき

に強 n -自明な結び目の結び目解消数は1となることを注意しておく。例えば三葉結び目と8の字結び目はそれぞれ強 1 -自明であるが、それらの連結和はもはや強 1 -自明ではない。しかしながらこの連結和は 1 -自明になっている。更に2以上の n について強 n -自明ならばアレキサンダー多項式は自明になるという N. Askitas & E. Kalfagianni の結果も知られている。H. Howards & J. Luecke は全ての自然数 n で強 n -自明な結び目は自明な結び目だけであることを証明した。彼らの証明方法は古典的な切り貼りの3次元多様体論を用いるというユニークなものである。この定理は、先に述べた Vassiliev 不変量に関する未解決の難問へのアプローチの可能性の一つを示したという点でも注目に値する。そして同時に、証明においては縫い目付き多様体を扱うという点で3次元接触多様体論やフレア理論とのこれからの関わりが注目される。



図1 結び目と絡み目

2. 研究の目的

低次元位相幾何学における、結び目、絡み目、3次元多様体の具体例を調べることにより個々の詳しい性質のみならず接触位相幾何学における対応する分類理論も構築する。そして写像類群や有限型不変量の理論へ応用を行う。特に結び目を調べる際には図2のような結び目の交差変換による変化の様子を詳しく解明する。以上のことを具体的な結び目の場合について調べる。特に2橋結び目とモンテシノス結び目の強 n -自明性について幾何的な方法を駆使して調べる。

強 n -自明性の概念は成分が2個以上の絡み目に対しても同様に定義されることを注意しておく。Y. Tsutsumi は強 n -自明な絡み目は各成分の結び目がザイフェルト曲面を互いに交わらないように張ることができる、すなわち境界絡み目であることを証明している。境界絡み目のクラスの中で強 n -自明な絡み目がどのように分布するかを調べる。更に、強 n -自明の概念は自然に二つの結び目の間の n -隣接の概念へと拡張されるので、 n -隣接性についても詳しく調べる。結び目解消数の研究が結び目理論において中心的な位置を占めているといっても過言

でないように、強 n -自明性と n -隣接性の研究も低次元位相幾何学および3次元接触多様体論の新しい問題意識と共にこれから発展していくものと思われる。

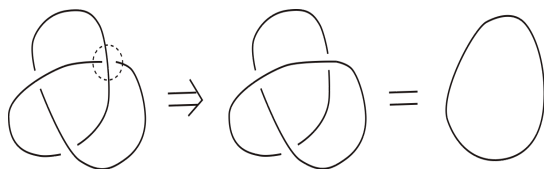


図2 交差変換

3. 研究の方法

図1や図2のように結び目を表す絵のことを結び目図式と呼ぶ。結び目図式は平面上の単純閉曲線で交点は横断的な2重点のみのものから、交点付近の一部の線を消して結び目の上下関係がわかるように描いたものである。当該研究においては、2次元の平面上に表されたダイアグラムの詳細な分析を行う。ルジャンドル結び目や横断的結び目の場合にはフロントと呼ばれる、カスプあるいはカール付きのダイアグラムを調べる必要がある。更に古典的な切り貼りの3次元多様体論を駆使して結び目補空間やオープンブック分解の構造を調べる。ジルーにより開発された凸曲面の理論を用いて曲面を手掛かりにして3次元接触多様体を扱う。ホンフリー多項式やコバノフ不変量によりベヌカン不変量などの上からの評価を行う。

4. 研究成果

一般に3次元ボールに2本の線が埋め込まれたものをタングルと呼ぶ。ここで線の境界の点たちはボールの境界の球面上にのっているものとする。タングルにおいて埋め込まれた線がまっすぐな線をなす場合は自明なタングルと呼ぶ。2橋結び目は二つの自明なタングルの表面付近をねじって貼り合わせてできるような結び目のクラスである(図3)。2橋結び目はある互いに素な整数の組 (p, q) で表されることが知られており、そのとき2橋結び目を $S(p, q)$ で表す。実際に p/q を連分数展開したときに、各項の数列がボールの貼り合わせ写像の縦向きあるいは横向きにひねる回数および順番を表している。

この研究において私は、二つの2橋結び目が互いにいつ3-隣接になるかを完全に決定した。更にモンテシノス結び目がいつ2橋結び目と2-隣接になるかの予想をあげてデーノ手術理論との関係を詳しく調べた。

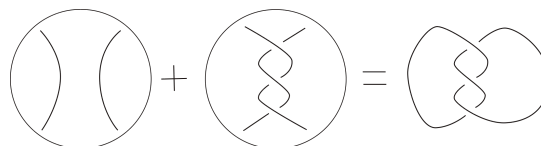


図3 自明なタングルと2橋結び目

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 1件)

I. Torisu : 3-adjacency relation of two-bridge knots and links, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol. 21, no. 6 (2012) 1250051, 7 pp 査読有り

〔学会発表〕(計 1件)

鳥巢 伊知郎: 集中講義「結び目の nugatory crossing problem と n -adjacency について」 (20121105-20121108). 埼玉大学

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織 (1)研究代表者

鳥巢 伊知郎 (TORISU Ichiro)
産業医科大学・医学部・准教授
研究者番号：5 0 3 2 3 1 3 4

(2)研究分担者
()

研究者番号：

(3)連携研究者
()

研究者番号：