

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 21 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740054

研究課題名(和文) 1次元排他過程のダイナミクスの研究

研究課題名(英文) Studies on dynamics of one-dimensional exclusion processes

研究代表者

笹本 智弘 (Sasamoto, Tomohiro)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70332640

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：界面成長を記述するKardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程式や、その離散版モデルの揺らぎについての研究を行った。特にレプリカ法とよばれる手法を用いて定常状態における1次元KPZ方程式の高さ分布と時空2点相関関数に対する明示的な表式を求めることに成功した。これらの量はこれまでいくつかの物理的な手法を用いて調べられていたが、近似無しに表式が得られたのは大きな進展である。また、非対称排他過程やq-TASEPと呼ばれる離散モデルに対して双対性を用いることにより、見通しよく揺らぎの性質を理解出来る事を示した。さらに多点分布や多成分系に対する揺らぎについてもいくつかの成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We have studied fluctuation properties of the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) equation and its discrete analogues, which are known to describe growing interfaces. By applying the replica techniques, we obtained explicit formulas for the one point height distribution and space-time two point correlation functions in the stationary state. These quantities had been studied by using various approximate methods from physics. Our explicit formulas do not involve any approximation and should be useful for further studies. In addition we have shown that one can study fluctuation properties of these processes in a systematic way by combining duality for interacting particle systems and some techniques from integrable systems like Bethe ansatz. We have also studied multi-point distribution for the KPZ equation, multi-component exclusion processes and KPZ equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、数学一般(含確率論、統計数学)

キーワード：無限粒子系 確率過程 統計力学 ランダム行列

## 1. 研究開始当初の背景

1次元非対称排他過程(asymmetric simple exclusion process, 以下 ASEP と略.)は、1次元格子上を多数の粒子が体積排除の相互作用の下非対称なランダムウォークをする確率過程である。定常状態は以前からかなりよく理解されていたが、近年ダイナミクスについての理解が進んでいる。特に2000年に Johansson が完全非対称排他過程(粒子が一方向のみに移動する ASEP, 以下 TASEP と略.)とランダム行列理論との関係を見出し、カレントの揺らぎがガウシアンユニタリアンサンプルの最大固有値の揺らぎと同じであることを示して以来、種々の一般化や類似の結果が得られてきた。特に本研究に関係するところでは、TASEP の背後に Gelfand-Zetlin パターンの構造があることが分かって来たことや、一般の ASEP に対するカレント揺らぎに関する Tracy-Widom の結果が出て来ていたことが開始当初の状況であった。ASEP に対する結果は、推移確率から始めて大変な計算の後に得られたものであり、その理解が望まれていた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、TASEP とランダム行列理論の関係や一般の ASEP において解析が可能となる仕組みの理解を深め、背後にある可積分構造を解明するとともに、関連するより一般の無限粒子系のダイナミクスに関する性質をより詳細に明らかにすることである。より具体的には、ペーテ仮設法を用いた解析とランダム行列理論を用いた解析を比較検討すること、ASEP において推移確率を用いる Tracy-Widom の方法以外の手法を検討すること、ASEP 以外の無限粒子系で同様な解析を行うこと、それらをふまえてより一般的な手法を開発すること、などを旨とする。

## 3. 研究の方法

(1) 研究を着実に発展させるため、まずは具体的な問題での計算を進めることを重視する。ある系のある初期条件、境界条件で解析がある手法を用いて可能であっても、初期条件、境界条件を少し変更するだけで、系の性質が大きく変化し、解析も困難となったりすることが多いので、一つ一つ丁寧に進める。(2) (1) のような具体的な計算を積み重ねる事により、種々の条件下でより多くのモデルに適用可能な一般的な手法の開発を行う。

## 4. 研究成果

(1) 1次元 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程式の1点における揺らぎについての理解を深めた。本研究開始直前に、Spohn 教授との共同研究において、wedge 型と呼ばれる特別な初期条件の下で1次元 KPZ 方程式の1点における揺らぎを決定する事ができた。これは本研究に正に関係することであったので、全

期間を通じてその理解を深めたり発展させる研究を行った。まずは揺らぎを記述する表式を単純化したり、多点分布を調べる可能性を議論した。

(2) KPZ 方程式に対するレプリカ法を ASEP へ拡張することを検討し、双対性はその基礎となる事を見いだした。KPZ 方程式の揺らぎの決定は、当初 ASEP の弱非対称極限を考える事で行われたが、その後レプリカ法という方法でも再導出された。ASEP において同様な解析が可能かどうかという疑問があったが、以前 Schutz により見いだされていた双対性を用いれば、同様な解析が可能となる事を見いだした。

(3) 半定常初期条件における揺らぎの決定。KPZ 方程式の解析において、初期条件を変更した系を調べるには、レプリカ法が適していると考えられたため、まずは初期条件が、右半空間で定常状態になっているようなものに対して揺らぎを決定した。手法的には wedge 型の場合と類似の点も多かったが、積分経路の変形や新たな組合せ的等式が必要となるなど非自明な点がいくつかあった。

(4) 定常状態における KPZ 方程式の1点揺らぎの決定、2点相関関数の計算を行った。上記の wedge 型初期条件、さらには半定常初期条件の場合の拡張として、系が定常状態にある場合の界面揺らぎの分布を決定した。これはレプリカ法を拡張することにより可能となったものである。解を得るには、初期条件の変形、新たな組合せ等式の発見、行列式構造を得るための工夫など多くの新しいアイデアが必要であった。これらの量は、1986年に KPZ 方程式が導入されて以来、繰り込み群やモード結合理論など、様々な物理的近似手法でアプローチされていたが、本研究により近似無しの解が得られたこととなる。

(5) q-TASEP や ASEP といった離散無限粒子系における双対性理論の発展。(2)での結果を発展させ、KPZ 方程式を離散化した q-TASEP や非対称排他過程(ASEP)に対し、双対性を適用する事によりレプリカ法と同様な解析を行い、最終的に適当なモーメント母関数が Fredholm 行列式の形に表される事を示す所まで可能であることを示した。これにより、これまで試行錯誤的に大変な計算の後に得られていた ASEP の揺らぎに関する漸近的な性質を、比較的直接的に示す事が可能となった。また用いた方法は、レプリカ法の理解を深める上でも、またこれまで reversible な場合を中心に考えられて来た双対性の新たな応用という観点からも興味深いものである。

(6) KPZ 方程式の2点分布に関する研究。

wedge 型初期条件を取った場合の空間2点相関に関して、長時間極限においては Airy 過程と呼ばれる過程で記述されることを強く示唆する結果を得た。KPZ 方程式の揺らぎに関しては、その1点分布に関してはいくつかの初期条件・境界条件に対してその具体的な表式が得られるようになっていたのに対して、2点相関に関しては理解が遅れていた。2013年に Dotsenko がレプリカ法を用いることにより、有限時間における有用な表式を得るのは困難だが長時間極限については調べることが出来る可能性を指摘して一つの表式を得たが、Airy 過程と呼ばれる以前他のモデル系から得られていた長時間極限と同じであるかは不明なままであった。Spohn 氏、今村氏との共同研究において、Dotsenko の議論を整理し、長時間極限では確かに Airy 過程が得られる事を示した

(7) q-boson ゼロレンジ過程に対する Plancherel 公式。KPZ 方程式の離散化の一つである q-boson ゼロレンジ過程と呼ばれる無限粒子系に関する Plancherel 型公式を証明することができた。いったんこのような公式が得られると、固有関数の直交性や完全性は直ちに従うので、分布や相関といった量を計算する際大変有用である。取り扱う作用素が自己共役で無い点为非自明であったか、空間反転に関する対称性を用いることにより証明を与えることができた。

(8) 多成分 ASEP、多成分 KPZ 方程式に関する研究。本研究で行っているような揺らぎを決定するような研究は、これまで1成分系に限られている。無限粒子系としては、自然な多成分版は存在するが、解析は難しい。しかし最近多成分系の揺らぎの一部は1成分系のもので記述されるという予想が出され、注目されている。多成分 ASEP の連続的記述が多成分 KPZ 方程式で与えられ、その揺らぎの性質の一部は1成分 KPZ 方程式で与えられると考えられる簡単な議論を与え、シミュレーションによる確認を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

- 1) P.L. Ferrari, T. Sasamoto, H. Spohn, Coupled Kardar-Parisi-Zhang Equations in One Dimension, J. Stat. Phys., 査読有, 153, 2013, 377-399.  
DOI: 10.1007/s10955-013-0842-5
- 2) T. Imamura, T. Sasamoto, H. Spohn, On the equal time two-point distribution of the one-dimensional KPZ equation by replica, J. Phys. A, 査読有, 46, 2013, 355002.  
DOI: 10.1088/1751-8121/46/35/355002

- 3) T. Imamura and T. Sasamoto, Stationary correlations for the 1D KPZ equation, J. Stat. Phys., 査読有, 150, 2013, 908-939.  
DOI: 10.1007/s10955-013-0710-3
- 4) T. Imamura and T. Sasamoto, Exact solution for the stationary KPZ equation, Phys. Rev. Lett, 査読有, 108, 2012, 190693.  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.190603
- 5) K.A. Takeuchi, M. Sano, T. Sasamoto, H. Spohn, Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale, Sci. Rep., 査読有, 1, 2011, 34.  
DOI: 10.1038/srep00034
- 6) T. Imamura and T. Sasamoto, Replica approach to the KPZ equation with half Brownian motion initial condition, J. Phys. A, 査読有, 44, 2011, 385001  
DOI: 10.1088/1751-8113/44/38/385001
- 7) T. Imamura, T. Sasamoto, Current moments of 1D ASEP by duality, J. Stat. Phys. 査読有, 142, 2011, 919-930.  
DOI: 10.1007/s10955-011-0149-3
- 8) T. Sasamoto, H. Spohn, One-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation: an exact solution and its universality, Phys. Rev. Lett. 査読有, 104, 2010, 230602  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.230602
- 9) T. Sasamoto, H. Spohn, Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition, Nucl. Phys. B, 査読有, 834, 2010, 523-542  
DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2010.03.026

[学会発表](計18件)

- 1) T. Sasamoto, Replica and dualities for KPZ systems, Spectra of Random Operators and Related Topics, 2013年12月05日, Kyoto (Japan)
- 2) T. Sasamoto, Fluctuations for one-dimensional Brownian motions with oblique reflection, 12th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2013年11月23日, Tokyo (Japan)
- 3) T. Sasamoto, The KPZ scaling functions in systems with a few conserved quantities, East Asia Joint Seminar on Statistical Physics 2013, 2013年11月21日, Kyoto (Japan).
- 4) T. Imamura, T. Sasamoto, Exact stationary two-point function for the 1D KPZ equation, STATPHYS25, 2013年07月22日, Seoul (Korea)
- 5) T. Sasamoto, The KPZ scaling functions for a two-component exclusion process, Summer School on KPZ equation and rough paths, 2013年06月04日, Rennes (France).

6) T. Sasamoto, The stationary correlations of the 1D KPZ equation, 108th Statistical Mechanics Conference, 2012年12月08日, Rutgers University, USA

7) T. Sasamoto, Replica analysis of surface growth models using quantum many-body systems in one-dimension, Recent Developments in the Mathematical Analysis of Large Systems, 2012年10月05日, E. Schrodinger institute, Austria

8) T. Sasamoto, On the replica analysis of the KPZ equation and q-TASEP, Integrable Systems, Growth Processes and KPZ Universality, 2012年09月24日, Banff International Research Station, Canada

9) T. Sasamoto, Fluctuations of the 1D directed polymer models, RandomMedia II, 2012年09月03日, Tohoku University, Japan

10) T. Sasamoto, Exact solutions for the stationary 1D KPZ equation, Disorder in Probability and Statistical Mechanics, 2012年06月28日, University of Modena, Italy

11) T. Sasamoto, Fluctuations for the stationary 1D KPZ equation, Workshop on RandomPolymer Models and Related Problems, 2012年05月21日, National University of Singapore, Singapore

12) T. Sasamoto, Stationary two-point correlation for the KPZ equation, EPSRC Symposium Workshop - Interacting particle systems, growth models and random matrices, 2012年3月22日, Warwick University, 英国

13) T. Sasamoto, Exact solutions of the KPZ equation, East Asia Joint Seminars on Statistical Physics 2012, 2012年3月18日, 蘇州大学, 中国

14) T. Sasamoto, Height distributions for the KPZ equation, Random matrix theory and applications, 2012年1月28日, ICTS, インド

15) T. Sasamoto, Replica analysis of the 1D KPZ equation, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2011年12月5日, 高知大学, 日本

16) T. Sasamoto, A replica analysis of the one-dimensional KPZ equation, EPSRC Symposium Workshop - Disordered Media, 2011年9月5日, Warwick University, 英国

17) T. Sasamoto, Replica Bethe ansatz approach to the KPZ equation with half Brownian motion initial condition, Stochastic Analysis, 2011年5月31日, Oberwolfach, ドイツ

18) T. Sasamoto, Height distributions in one-dimensional surface growth: from ASEP to KPZ equation, Random matrix theory and its applications II, 2010年12月7日, Mathematical research institute

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者  
笹本 智弘 (SASAMOTO, Tomohiro)  
千葉大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：70332640

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号：

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：