科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　５日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010　～　2012
課題番号：22740060

研究課題名（和文）
対称関数のプランシェレル確率測度における平均について

研究課題名（英文）
On averages for symmetric functions under Plancherel probability measures

研究代表者
松本　詔（MATSUMOTO SHO）
名古屋大学・多元数理科学研究科・助教
研究者番号：60547553

研究成果の概要（和文）：
ヤング図形の上に定義されるプランシェレル測度とランダム行列の関連について研究していくことが本研究のテーマであった。ランダムユニタリ行列、ランダム直交行列、実ウィッシャート逆行列、COE 行列、その他幾つかの行列成分モーメントを計算する手法を確立し、プランシェレル測度を通じて組合せ論的または表現論的な意味付けを与えた。

研究成果の概要（英文）：
The theme of our research is to study about connections between Plancherel measures on Young diagrams and random matrix theory. We have established the method for computations of averages of matrix entries, which are derived from random unitary matrices, random orthogonal matrices, inverse of real Wishart matrices, COE matrices, and so on. Moreover, we have given some combinatorial and representation-theoretic interpretations for them via Plancherel measures.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：解析学基礎
キーワード：代数学・解析学・ランダム行列・対称関数

1.　研究開始当初の背景

対称群のプランシェレル測度は、ランダムなヤング図形を考える際の標準的な確率測度である。これまでの多くの研究において、ランダム行列の代表的なモデルである GUE（ガウス型ユニタリ アンサンブル）の離散類似の一つとして位置づけられている。
例えば、ヤング図形の行の長さの分布は、ヤング図形のサイズが大きくなるときに適当なスケーリング極限をとることで、Tracy-Widom 分布と呼ばれる、ある極限分布に収束する。他方、GUE をはじめとする様々なランダム行列の固有値に関しても、行列のサイズが大きくなるときに適当なスケーリング極限をとることで同じ Tracy-Widom 分布が得られる。
このような対応以外にも、ランダム行列の特性多項式の平均が多く研究されている。ランダム・ヤング図形において、ランダム行列の特性多項式に対応する物は何かという問題が自然に挙げられるが、それはヤング図形

の容量多項式が答えの候補であった。当初、容量多項式のプランシェレル測度に関する平均の研究が始まったばかりであった。

２．研究の目的

ランダム行列と、ランダム・ヤング図形をはじめとする組合せ論的または表現論的な対象物に由来する確率モデルを比較する。

ヤング図形の容量を変数とする対称多項式を考え、それのプランシェレル測度に関する平均を計算する。これが当初の目的であった。この問題は、ランダム行列の特性多項式の平均を計算することの類似になっている。その理由の一つは、容量が Jucys-Murphy 元の固有値だからである。

研究の過程で問題は肥大化し、ランダム行列と Jucys-Murphy 元などの対称群の表現論に密接に関連した量との関連を調べることが主目的となった。

３．研究の方法

ランダム行列の Weingarten calculus が本研究の中心的な道具である。確率変数の族が与えられたときに、それらの混合モーメントを計算する手法を確立することは、基本的な問題である。例えば、ガウス確率変数の族の場合は、その計算手法は Wick の公式と呼ばれ、共分散の積を足し合わせることに帰着される。

ランダムなユニタリ行列の行列成分たちの混合モーメントを計算する手法が Weingarten calculus であり、Benoit Collins (2003)らにより始まった。これにより混合モーメントは、ユニタリ Weingarten 関数と呼ばれる対称群上の類関数の和として記述される。様々なランダム行列の行列成分の混合モーメントを計算する際、このユニタリ Weingarten 関数やその類似である直交 Weingarten 関数が中心的な道具となる。実際、たとえば COE ランダム行列の場合は、ユニタリ Weingarten 関数の足し合わせを考えることになり、結果として直交 Weingarten 関数が現れる。

また、ユニタリ Weingarten 関数は、互換の和である Jucys-Murphy 元を用いて表すことができる。これにより、ユニタリ Weingarten 関数の特殊値は、ある置換の数え上げに帰着される。組合せ論的な議論により実際に置換を数え上げることで、たとえばユニタリ Weingarten 関数の最高次の係数がカタラン数であることなどを示すことができる。

４．研究成果

① ユニタリ行列積分と Jucys-Murphy 元

Jucys-Murphy 元は対称群の群環の元であり、k 番目の Jucys-Murphy 元は k とそれ未満の数との互換の和として定義される。Jucys-Murphy 元は、群環の極大可換部分環を生成することが知られている。極大可換部分環は、対称群の既約表現に対角行列として作用する。そのときの固有値として、ヤング図形の容量が現れるのである。さらに Jucys-Murphy 元を変数とする対称多項式は、群環の中心元になる。

ユニタリ Weingarten 関数の、既約指標によるフーリエ展開は、係数に容量が現れる。その表示を通じて、ユニタリ Weingarten 関数は、Jucys-Murphy 元を変数とする完全対称多項式の母関数として見ることができることを示した。

Jucys-Murphy 元は単に互換の和なので、ユニタリ Weingarten 関数の特殊値の計算は、置換をある条件下での互換の積に分解する方法の数え上げにより求めることができる。ユニタリ Weingarten 関数はユニタリ行列のサイズ N に依存し、N の逆数のべき級数として展開される。最初の係数が、カタラン数になることは既に知られていたが、我々はそれを互換の数え上げにより、純粋組合せ的に示した。これにより、ランダム・ユニタリ行列の行列積分の、行列のサイズが大きいときの漸近挙動が観察される。

ユニタリ Weingarten 関数の研究のために、Jucys-Murphy 元を変数とする完全対称多項式について研究した。この問題を拡張し、他の対称多項式を考えるとどうなるかについて研究した。対称多項式全体のなす代数の基底を与える、単項対称多項式において、Jucys-Muphy 元を変数とした場合を考えた。この場合は、最高次は、ある種の「カタラン数の精密化」を適当な分配により足し合わせたものとなる。それを具体的に書き表した。これは先の、完全対称多項式の場合はカタラン数が登場する、という事実の精密化に他ならない。

その他、最高次以外の係数に関しても幾つかの係数の母関数を求めた。

なお、この研究が発表されたのち、Valentin Feray により、ユニタリ Weingarten 関数の係数のあいだの漸化式が得られている。

以上の研究は、Jonathan Novak 氏との共同研究による。

②．直交行列積分と Jucys-Murphy 元

前節の直交行列への類似について研究した。一般的に、複素数の場合よりも実数の場合の方が難しい。たとえば、ユニタリ群の表現論よりも実直交群の表現論の方が難しくなる。ユニタリ行列積分でユニタリ Weingarten 関数が登場したように、直交行列積分では、直交 Weingarten 関数が必要になり、それはユニタリ行列の場合よりもやや難しくなる。

ユニタリ Weingarten 関数が、対称群の類関数として実現されたのに対し、直交 Weingarten 関数は、あるゲルファント対のヘッケ環の元として実現される。それは対称群と超八面体部分群のなすゲルファント対である。すなわち、直交 Weingarten 関数は超八面体群の両側からの作用で不変な関数である。

ユニタリ群の場合と同様に、Jucys-Murphy 元との関連を考えることは自然である。ユニタリ群の場合は、対称多項式の変数に、Jucys-Murphy 元を挿入したものを考えた。直交群の場合は、やはり対称多項式の変数に、奇数番目の Jucys-Murphy 元を挿入し、さらに右から超八面体で平均したもの、を考える必要がある。この事実を発見したことがブレイクスルーとなった（発見のアイディアは Zinn-Justin の論文で見ることができる)。

直交 Weingarten 関数は、完全対称多項式を上のように Jucys-Murphy 元で処理したもので記述される。やはり最初の係数がカタラン数の積となる。それをマッチングの数え上げを実行することで示した。

また、単項対称多項式の場合の最初の係数も、ユニタリの場合のそれと一致することを示した。

これにより、ユニタリ Weingarten 関数と直交 Weingarten 関数は最初の係数が一致する。言い換えれば、ユニタリ行列積分と直交行列積分は、行列のサイズが大きいときは似た挙動が観察できるということが分かった。もちろん２番目以下の係数は本質的に異なる。

さて、この研究で、４つの予想を提示した。１つ目。Jucys-Murphy 元を変数とする対称多項式は対称群の群環の中心元となるが、中心元はそれですべてである、ということが知られていた。上の議論をベースに、超八面体群とのゲルファント対への類似を提示した。この予想はまもなく､Aker と Can により、代数的な深い考察により示された。２つ目。ユニタリ Weingarten 関数や直交 Weingarten 関数の研究は、ジャック多項式をベースとしたパラメータαα付きの拡張を促す。ユニタリ、直交の場合がそれぞれα=1,2 となる。容量多項式によるある量が、αに依存しないことを予想した。これは Dolega と Feray によって、αに関する次数の評価をする手法により、示された。３つ目。このαに関する量は、最高次係数と２番目の次数の係数はαに依らないことを予想した。これも Dolega と Feray により示された。４つ目。直交 Weingarten 関数の第２の係数に関して、組合せ論的な意味付けを予想した。これは、Feray により漸化式を通じた証明が得られた。

このように、いくつか提示した予想も、本研究の枠を超えた分野に、直ちに多くの影響を与えた。

③ 実 Wishart 行列の逆行列

Wishart 行列は、多変量統計で最も重要なランダム行列の一つである。その逆行列の分布も重要視されている。複素 Wishart 行列とその逆行列の行列成分の混合モーメントは、Graczyk, Letac, Massam により得られていた。しかし、実 Wishart 行列の逆行列の混合モーメントは知られていなかった。今回、直交 Weingarten 関数を用いてそれを記述する手法を得た。この場合に直交 Weingarten 関数が必要となる理由は不明であり、驚くべきことである。この結果は実際に統計に活用されつつある。研究代表者と、Benoit Collisn, Nadia Saad,との共同研究が進行中である。

④ COE ランダム行列。

ランダム・ユニタリ行列は、CUE 行列とも呼ばれる。CUE は Circular Unitary Ensemble の略である。同様に、COE(直交アンサンブル)、CSE(斜交アンサンブル)が良く知られている。これらは量子力学と深く関連し、Dyson の円アンサンブルと呼ばれランダム行列理論でも中心的な役割を果たしている。

COE 行列はランダムな対称ユニタリ行列である。この行列成分の混合モーメント計算する手法を確立した。

COE 行列はランダム・ユニタリ行列とその転置行列の積として実現される。そのため、ランダム・ユニタリ行列の混合モーメントを実際に計算すれば、COE の場合も得られるはずである。しかしながら、実際に簡単な形に整理するのは容易ではなかった。結果として、ユニタリ Weingarten 関数の和を計算したところ、直交 Weingarten 関数が現れた。

前節の場合と同様の事態であるが、直交 Weingarten 関数が必要とされる理由がやはり不明であり、今後の研究が待たれる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）
1. S. Matsumoto and J. Novak, Jucys-Murphy elements and unitary matrix integrals, International Mathematics Research Notice, 2013, no.2, 362-397. 査読有

2. S. Matsumoto, General moments of the inverse real Wishart distribution and orthogonal Weingarten functions, Journal of Theoretical Probability 25 (2012), no.3, 798-822. 査読有.

3. S. Matsumoto, Jucys-Murphy elements, orthogonal matrix integrals, and Jack measures, The Ramanujan Journal 26 (2011), no. 1, 69-107. 査読有.

他.

〔学会発表〕（計 17 件）

1. 2012 年８月７日、S. Matsumoto, Zeros of a Gaussian power series and Pfaffians, Workshop「Algebraic Combinatorics related to Young diagrams and Statistical Physics」京都大学、国際高等研究所.
2. 2011 年 12 月 21 日、松本詔、COE 行列成分に関するモーメントの計算法、確率論シンポジウム、関西大学.
3. 2010 年 12 月 15 日、 S. Matsumoto, Unitary matrix integrals and enumerations of permutations, Workshop「Integrable Systems, Random Matrices, Algebraic Geometry and Geometric Invariants」, 京都大学.

他。

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~sho-matsumoto/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
松本 詔（MATSUMOTO SHO）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教
研究者番号：60547553

(2)研究分担者なし

(3)連携研究者なし