

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 12日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010 ~ 2012

課題番号：22740062

研究課題名（和文）

求積公式に内在する幾何構造および組合せ論的構成法の研究

研究課題名（英文）

A study of combinatorial constructions and geometric characterizations of cubature formulas

研究代表者

澤 正憲 (SAWA MASANORI)

名古屋大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：50508182

研究成果の概要（和文）：

数値解析における直交多項式や再生核の理論、代数的組合せ論におけるアソシエーションスキームやコヒアラント代数の理論、離散幾何における距離集合の理論などを融合させて、最小立体求積公式 (Minimal Cubature Formula) の点集合の配置の数論的特徴付けを行い、さらに次数 20 以下の低次数の最小立体求積公式の存在・非存在命題を幾つか導いた。また、実既約鏡映群で不変な最小立体求積公式の分類も行った。

研究成果の概要（英文）：

We presented a number-theoretic characterization of the configuration of points of a minimal cubature formula, as well as some existence and non-existence results on such formulas of small degrees, by unifying techniques that have been developed in numerical analysis, algebraic combinatorics, discrete geometry and so on. We also characterize a minimal cubature formula whose point set consists of orbits of a finite irreducible reflection group.

交付決定額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2010年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2011年度 | 700,000   | 210,000 | 910,000   |
| 2012年度 | 800,000   | 240,000 | 1,040,000 |
| 総計     | 2,600,000 | 780,000 | 3,380,000 |

研究分野：代数的組合せ論，数値解析，離散幾何・球面幾何

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：求積公式，デザイン，直交多項式の零点

## 1. 研究開始当初の背景

多変数関数の積分値を空間内の有限個の点での関数値の重み付き平均値によって近似する積分近似公式を立体求積公式という。次数  $t$  以下の任意の多項式に対して積分値と重み付き平均が等しくなる立体求積公式を次数  $t$  であるという。

少ない近似点からなりかつ高次数の立体求積公式の存在問題は、19世紀初頭のガウスの研究に端を発し、その後 Ditkin、Lebedev、

Sobolev、Mysovskikh らロシアの解析学者を中心に多変数直交多項式の共通零点の解析と並行して古くから研究されてきた。特に、直交群不変な積分のクラスである球対称積分 (Spherically Symmetric Integral) に対して、最小立体求積公式 (Fisher 型不等式と呼ばれる点集合のサイズに関する下限評価不等式において等号が成り立つ公式) の近似点の配置には、Bose-Mesner 代数や Coherent 代数などの様々な  $C$  代数の構造が自然に付随するため、立体求積公式の研究は代

数的組合せ論やその関連分野においても盛況である。

一変数の最小立体求積公式は常に存在し、その点集合と重みは直交多項式の零点によって記述されることがよく知られている。同様に二変数の場合も、多変数直交多項式の共通零点を調べることを通じて、最小立体求積公式の存在・非存在命題や分類定理がこれまでに多数発表されてきた。しかしながら、三変数以上の場合には球対称積分に対する最小立体求積公式の解析は十分に進んでおらず、本研究開始当初、極めて散在的な状況でのみ次数 5、7、9 等の最小立体求積公式の存在例が僅か数点確認されているに過ぎなかった。

## 2. 研究の目的

球対称積分に対して最小立体求積公式の具体的な構成法を考案し、或いはそのような立体求積公式の近似点の幾何的配置に関する条件を導くことによって、最小立体求積公式の存在問題の解決に貢献することを目的とする。

## 3. 研究の方法

(点配置の幾何的・数論的特徴付け)

技術的には、再生核の理論を用いた最小立体求積公式の解析的特徴付けに関する Mysovskikh の定理、点集合に付随する距離集合に関する諸定理を用いた。再生核の理論に造詣の深い Yuan Xu 教授 (オレゴン大・理)、距離集合の理論の世界的権威である Oleg Musin 教授のもとを訪れ、同教授らの研究グループと議論を交わしながら研究を進展させた。

(構成的アプローチ)

Corner vector の B 型 Weyl 群による軌道を用いた構成的アプローチに着目、Victoir 法の基礎になる組合せデザインの幾何的構成法の模索、など。後者については、デザイン理論の国際的な権威である Reinhard Laue 教授の助言を仰ぎながら研究を進めた。

(最小立体求積公式の分類に向けて)

技術的に、不変調和多項式空間の次元定理として知られる Molien-Poincare の定理、不変立体求積公式の特徴付けに関する Sobolev の定理などを用いた。

## 4. 研究成果

(2010 年度)

Vesselin Vatchev 氏 (テキサス大ブラウンズビル校)、野崎寛氏 (愛知教育大) らと共に、Larman-Rogers-Seidel の定理と野崎氏による一般化定理を用いて、次数  $4k+1$  の最小立体求積公式の点に付随する距離集合の有理性を証明した。これにより、チェビシェフ多項式と関与する特殊な積分のクラスに対して、次数 13、17、21 の最小立体求積公式の非存在命題を導いた。空間の次元に依らず次数 10 以上の最小立体求積公式の非存在に言及する結果はこれまでほとんど知られていなかったことを強調しておく。以上の成果は、数値解析の分野における国際的トップジャーナルである “SIAM Journal on Numerical Analysis” に掲載された (次節 5. の雑誌論文[1])。

B 型 Weyl 群の特殊な軌道を用いることにより、4 次元かつ次数 5 の最小立体求積公式を新たに発見した。また構成された最小立体求積公式の点に対応する距離集合を計算して、立体求積公式に付随するコヒアラント代数の構造を明らかにした。以上の成果は、平尾将剛氏 (東京女子大)、Zhou Yuanyuan 氏 (名大) との共著論文として、組合せ論における国際的なトップジャーナルである “Journal of Combinatorial Theory Series A” に掲載された (次節 5. の雑誌論文[7])。

(2011 年度)

2 次元最小立体求積公式の存在性に関する特筆すべき結果の一つとして、Yuan Xu 教授 (オレゴン大・理) は最小立体求積公式の存在問題のある積分方程式系の解に帰着させる解析的アプローチを提示した (Advances in Computational Mathematics, 1998)。Xu 教授の結果は理論的に極めて興味深いものであるが、その証明は解析の専門的な議論を多数必要とし、また複雑かつ長大であるという欠点を有する。そこで後述の雑誌論文[3]では、Sobolev の定理を一般の球対称積分について拡張し、Xu の定理の短い代数的な別証明を与えた。さらに、例外型を含むすべての実既約鏡映群について、Corner Vector の軌道からなる最小立体求積公式の分類定理を証明した。なお、雑誌論文[3]は野崎氏との共著論文としてまとめられ、数学の国際的一般誌である “Canadian Journal of Mathematics” に掲載された。CJM は Paul Erdős など著名な組合せ論の数学者が好んで投稿したジャーナルでもあり、組合せ論やその周辺分野では特に認知度の高いジャーナルである。

(2012年度)

研究課題の最終年度であったため基本的に総括と成果発表に努めた。特筆すべき口頭発表業績として、日本数学会2013年会・統計数学分科会における基調・特別講演(次節5.、国内会議等、基調・特別講演[1])と、日本応用数理学会・日本数学会応用数学分科会が共催する応用数学合同研究集会(次節5.、国内会議等、基調・特別講演[2])を挙げておく。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計9件)

- [1] M. Hirao, H. Nozaki, M. Sawa, V. Vatchev.  
A new approach for the existence problem of minimal cubature formulas based on the Larman-Rogers-Seidel theorem,  
*SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 50, 2716-2728 , (2012), (査読有)
- [2] S. Watanabe, K. Ishii, M. Sawa,  
A  $q$ -analogue of the addressing problem of graphs by Graham and Pollak,  
*SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 26, 527-536 (2012), (査読有)
- [3] H. Nozaki, M. Sawa,  
Note on cubature formulae and designs obtained from group orbits.  
*Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 64, 1 359-1377 , (2012), (査読有)
- [4] M. Hirao, M. Sawa,  
On minimal cubature formulae of odd degrees for circularly symmetric integrals,  
*Advances in Geometry*, Vol. 12, 483-500, (2012), (査読有)

[5] Ei. Bannai, E. Bannai, M. Hirao, M. Sawa,

On the existence of minimum cubature formulas for Gaussian measure on  $\mathbb{R}^2$  of degree  $t$  supported by  $\lfloor t/4 \rfloor + 1$  circles,  
*Journal of Algebraic Combinatorics*, Vol. 35, 109-119 , (2012), (査読有)

[6] A. Munemasa, M. Sawa,

Steiner quadruple systems with point regular abelian automorphism groups,  
*Journal of Statistical Theory and Practice*, Vol. 6, 97-128 , (2012), (査読有)

[7] M. Hirao, M. Sawa, Y. Zhou.

Some remarks on Euclidean tight designs,  
*Journal of Combinatorial Theory Series A*, Vol. 118, 634-640 , (2011), (査読有)

[8] M. Jimbo, Y. Kuniyama, R. Laue, M. Sawa,

Unifying some known infinite families of combinatorial 3-designs,  
*Journal of Combinatorial Theory Series A*, Vol. 118, 1072-1085 , (2011), (査読有)

[9] M. Sawa,

Optical orthogonal signature pattern codes with weight 4 and maximum collision parameter 2,  
*IEEE Transactions on Information Science*, Vol. 56, 3613-3620 , (2010), (査読有)

[学会発表] (計15件)

[1] 澤 正憲.  
数理統計, 代数的組合せ論におけるデザイン  
の理論と 数値解析学における立体求積公式  
の理論. 日本数学会2013年会 統計分科会.  
京都大学, 2013年3月20-23日.

[2] 澤 正憲.  
グラフの距離行列, 疑等長埋め込み, 完全多部グラフ分解.  
第9回組合せ論若手研究集会. 慶応義塾大学.  
2013年3月14日

[3] 澤 正憲.  
Hilbert identity, cubature formula, and combinatorial design.  
応用数学合同研究集会 離散/解析系合同セッション.  
龍谷大学. 2012年12月20-22日

[4] M. Sawa  
Constructions of optimal experimental designs of degree 3.  
2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics.  
Shanghai Jiao Tong Univ., Shanghai, China, Aug 17-22, 2012.

[5] M. Sawa  
Optimalities of designs and configurations of points on the sphere” .  
The 2<sup>nd</sup> Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific RIM Meeting.  
Tsukuba International Congress Center, Japan, July2-4 2012.

[6] 澤 正憲.  
Cubature formula, Hilbert identity, isometric embedding.  
Global COE Seminar 『第22回離散幾何解析セミナー』  
京都大学. 2012年6月1日

[7] 澤 正憲.  
ヒルベルト恒等式と球面上の重み付きデザインの相互関係について.  
東北大学組合せ論セミナー.  
東北大学. 2012年2月1日.

[8] 澤 正憲.  
ヒルベルト恒等式と立体求積公式.

熊本大学群論セミナー.  
熊本大学. 2012年1月20日

[9] 澤 正憲.  
整数の冪乗和に関する恒等式と立体求積公式.  
第9回「代数学と計算」研究集会.  
首都大学東京. 2011年11月7-9日

[10] M. Sawa  
An approach to the existence problem of minimal formula based on the LRS theorem” .  
The 9<sup>th</sup> Japan-Korea Workshop on Algebra and Combinatorics. Tohoku Univ., Japan, Jan24-25 2011.

[11] 澤 正憲.  
組合せ3 - デザインの統一的構成法とその求積公式論への応用.  
RIMS共同研究「代数的符号理論, 組合せデザインとその周辺」.  
京都大学数理解析研究所, 2011年3月8日

[12] M. Sawa.  
Cubature formula for some special integral,  
The 3<sup>rd</sup> Pacific Workshop on Discrete Mathematics, Tokai University Pacific Center, Hawaii, USA, Dec 7-10 2010

[13] M. Sawa,  
Cubature formula and spherical design. Mathematics Department Seminar (Colloquium).  
University of Texas at Brownsville, USA, Sept 2010.

[14] M. Sawa  
Cubature formula and integral with some symmetry” .  
Geometry Seminar.  
University of Texas at Brownsville, USA, Aug 2010.

[15] 澤 正憲.

Cubature formula.

第6回組合せ論若手研究集会. 慶応義塾大学. 2010年2月2-4日

[その他]

ホームページ等

<http://jim.math.cm.is.nagoya-u.ac.jp/~sawa/ja/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

澤 正憲 (名古屋大学)

研究者番号 : 50508182

(2) 研究分担者 なし  
( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者 なし  
( )

研究者番号 :