

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 4月 1日現在

機関番号：17102

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740069

研究課題名（和文） 無限次元力学系の分岐理論の構築とその結合振動子系への応用

研究課題名（英文） A bifurcation theory of infinite dimensional dynamical systems and its applications to coupled oscillators

研究代表者

千葉 逸人（CHIBA HAYATO）

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・助教

研究者番号：70571793

研究成果の概要（和文）：同期現象を記述する代表的な結合振動子系である蔵本モデルの分岐構造についての研究を行った。特に、ゲルファンドの3つ組に基づいた線形作用素の新しいスペクトル理論を構築し、これを応用することで、長年未解決であった分岐構造についての蔵本予想を証明した。これにより、系の結合強度が十分大きければ同期現象が起こることが明らかとなった。

研究成果の概要（英文）：A system of coupled oscillators called the Kuramoto model, which describes synchronization phenomena, has been investigated. I have established a new spectral theory of linear operators based on a Gelfand triplet, and it is applied to prove the Kuramoto conjecture on a bifurcation structure of the Kuramoto model. It is revealed that a synchronization occurs if the coupling strength is sufficiently large.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：力学系

1. 研究開始当初の背景

無数の振動子群が結合することによって得られる大自由度の力学系の研究は応用上の観点から重要であるが、従来、そのような大自由度力学系の解析は極めて困難であった。特に、同期現象を記述する代表的な結合振動子系である蔵本モデルは、1975年に提唱されて以来、盛んに研究されているが、そのダイナミクスの構造は依然として未解決であ

った。

困難さの本質は、無限次元蔵本モデルを線形化して得られる線形作用素が虚軸上に連続スペクトルを持つことに起因している。よく知られているように、線形作用素のスペクトルは、力学系の不動点近傍の局所的な振舞いを記述する。特にスペクトル集合が左半面に含まれれば解は漸近安定であり、右半面にス

ペクトルが存在すれば解は不安定である。ところが無限次元蔵本モデルを線形化して得られる線形作用素については、全てのスペクトルが虚軸上に存在しているため、そのダイナミクスを通常のスペクトル集合から決定することは困難であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、連続スペクトルを持つような線形作用素の新しいスペクトル理論を構築し、これを応用することで、従来は解析が困難であった大自由度力学系の分岐構造を調べることである。

通常、線形作用素のスペクトルは、 \mathbb{C} 上におけるレゾルベントの特異点集合として定義されるが、Gelfand の 3 つ組を導入してレゾルベントをある線形位相空間 X からその双対空間 X' への作用素と捉え直すと、レゾルベントが虚軸上の連続スペクトルを越えて解析接続可能になり、一般には複雑な Riemann 面を持ちうる。そこで、Riemann 面全体を見渡したときのレゾルベントの特異点集合を一般化スペクトルと呼ぶ。

一般化スペクトルは、普通のスペクトルと同じくらい、作用素についての重要な情報を持っており、これを用いることで従来は見えなかった現象を捉えることができる。

本研究では、これを蔵本モデルの解の分岐理論に応用し、1985 年以来未解決であった蔵本予想を解決することを目的とする。

3. 研究の方法

本研究では、まず蔵本モデル、およびこれから得られる線形作用素を研究した。その後蔵本モデルに対して得られた結果を一般化することで、一般の線形作用素の研究を行った。

より具体的には、初年度においては、蔵本モデルの分岐図に関する蔵本予想を解決することを目的とした。そのために、蔵本モデルが超関数空間上には中心多様体を持ち、その上に力学系を縮約できることを示す。もしこの縮約によって力学系が有限次元の問題に帰着されれば、蔵本モデルの分岐構造が明らかとなり、蔵本予想が解決されると考えられる。蔵本モデルに対しては物理学者による先行研究が数多くあるため、それらの結果と照らし合わせながら慎重に行

った。2 年目以降においてはより一般的・抽象的な無限次元力学系に対して、蔵本モデルに対して行った研究を一般化することにより、無限次元力学系に対する分岐理論の基礎を確立することを目指した。

4. 研究成果

(1) 応用上、最も重要な結合振動子系である蔵本モデルに対し、Gelfand の 3 つ組に基づいた新しいスペクトル理論が適用可能であることを示した。

従来、蔵本モデルから得られる線形作用素は虚軸上に連続スペクトルを持つため、その分岐構造を調べることは困難であったが、一般化された意味での固有値が解の安定性と分岐を支配していることを示した。すなわち、Gelfand の 3 つ組を導入して、レゾルベントをある線形位相空間 X からその双対空間 X' への作用素と捉え直すと、レゾルベントが虚軸上の連続スペクトルを越えて解析接続可能になり、その解析接続が Riemann 面上に固有値とは異なる極一般化固有値を持つことを示した。特に、一般化固有値が左半面にあるときは非同期状態が漸近安定となる。さらに、系の結合強度を大きくしていくと、一般化固有値が虚軸をまたぎ、このときある超関数空間上に有限次元の中心多様体が存在することを示した。

この中心多様体上の力学系を調べることで、未解決問題であった非同期状態から同期状態への相転移に関する蔵本予想を肯定的に解決した。

蔵本モデルは同期現象を説明する方程式のため、その構造を明らかにしたことは応用上の観点から極めて重要である。また理論上の観点からも、世界中の多くの研究者が研究しており、未解決問題である蔵本予想を解決したことは大きなインパクトがある。

(2) 蔵本モデルの解析に用いた方法を一般化し、一般の作用素に対する新しいスペクトル理論を構築した。

ある解析性の条件を満たす線形作用素に対し、Gelfand の 3 つ組に基づいて、一般化された意味での固有値、固有超関数、固有値の代数的重複度、連続スペクトル、剰余スペクトル、固有空間への射影作用素、レゾルベン

ト, 作用素の半群など, 従来のスペクトル理論と並列な理論を構築した. 特にコンパクト作用素に対する理論など, それまでに知られていた理論を大きく一般化した.

この理論は結合振動子系から得られる積分方程式やプラズマの運動を記述するブラソフ方程式など, 虚軸上に連続スペクトルと相性が良く, 従来の手法では解明できなかった様々な現象を明らかにすることができると思われる. 特に, 通常の意味での固有値が存在しない場合でも, 一般化固有値が解の漸近挙動を支配することが明らかになったため, 解の安定性理論が大きく前進したことになる.

また, この理論は反応拡散系や非線形シュレディンガー方程式など, 多くの重要な方程式に適用可能であるため, 今後一層の発展と応用が期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① H.Chiba,
"Continuous limit of the moments system for the globally coupled phase oscillators",
Discret. Contin. Dyn. S.-A, Vol.33, pp.1891-1903.(2013).
DOI:abs/0911.4993
- ② H.Chiba, I.Nishikawa,
"Center manifold reduction for a large population of globally coupled phase oscillators",
Chaos, 21, 043103 (2011).
DOI:
<http://dx.doi.org/10.1063/1.3647317>
- ③ H.Chiba,
"Linear stability of the incoherent solution and the transition formula for the Kuramoto-Daido model",
RIMS Kokyuroku Bessatsu, B21 (2010).
DOI:abs/1003.5024

[学会発表] (計 9 件)

- ① 千葉逸人,
Gelfand の 3 つ組を用いた線形作用素のスペクトル理論と, その結合振動子系のダイナミクスへの応用,
日本数学会, 2013年3月21日, 京都大学.
- ② 千葉逸人,
A spectral theory of linear operators on a Gelfand triplet and its application to the Kuramoto model.
微分方程式の総合的研究, 2012年12月15日, 京都大学.
- ③ 千葉逸人,
一般化スペクトル理論とその結合振動子系のダイナミクスへの応用.
数学会北海道支部会, 2012年12月6日, 北海道大学.
- ④ H.Chiba,
A spectral theory of linear operators on Gelfand triplets and its applications to infinite dimensional dynamical systems,
Dynamical Systems: 100 years after Poincare, 2012年9月6日, Gijon, Spain.
- ⑤ H.Chiba,
A spectral theory of linear operators on Gelfand triplets and its applications,
2012 NCTS Workshop on Dynamical Systems, 2012年5月16日, National Center of Theoretical Sciences, 台湾
- ⑥ H.Chiba,
Synchronization -A bifurcation theory of infinite dimensional dynamical systems-,
GCOE International Symposium on Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy, 2012年2月20日, 東北大学.
- ⑦ H.Chiba,
A spectral theory of linear operators on Gelfand triplets,
Emerging Topics on Differential Equations and their Applications, 2011年12月5日, Nankai Univ., 天津.

⑧ H. Chiba,
A spectral theory on Gelfand triplets,
Workshop on Nonlinear Partial
Differential Equations, 2011年11月4
日. Normal Univ. 上海.

⑨ H. Chiba,
Bifurcation theory of the
infinite-dimensional Kuramoto model,
Symmetry Plus Integrability 2010,
2010年6月13日, South Padre Island,
Texas

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

6. 研究組織

(1) 研究代表者

千葉 逸人 (CHIBA HAYATO)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研
究所・助教
研究者番号：70571793

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：