様式Ｃ－１９

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 17 日現在

機関番号：12501
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2012
課題番号：22740082

研究課題名（和文）　ポテンシャル付非線型分散型方程式の散乱及び逆散乱問題

研究課題名（英文）　Direct and inverse scattering problems for nonlinear dispersive equations with potential

研究代表者
佐々木　浩宣（SASAKI HIRONOBU）
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00568496

研究成果の概要（和文）：本研究では、分散型方程式に於ける散乱の順問題と逆問題について考察した。関数解析的手法を用いることで、3 次元 Hartree 方程式に於ける逆散乱問題、量子場に関する線型 Klein-Gordon 方程式に於ける散乱の順問題と逆問題、1 次元非線型 Dirac 方程式に於ける散乱の順問題について研究成果を得た。

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider direct and inverse scattering problems for dispersive equations. By using methods of functional analysis, we obtain results for inverse scattering problems for Hartree equations in three space dimensions, direct and inverse scattering problems for the Klein-Gordon equation in quantum field theory and scattering problems for nonlinear Dirac equations in one space dimension.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学、基礎解析学
キーワード：非線型分散型方程式

１．研究開始当初の背景

＜対象となる偏微分方程式＞

(1) 非線型分散型方程式（例：非線型 Schroedinger 方程式、Hartree 方程式、非線型 Klein-Gordon 方程式、非線型 Dirac 方程式、Korteweg-de Vries equation 方程式）は、古典場や非線型波動を記述する重要な方程式であり、これまでに多くの研究がなされている。

(2) 量子場に関する偏微分方程式は、素粒子の多体問題に関連がある。通常の偏微分方程式は、関数または超関数を未知とするが、量子場に関する偏微分方程式は作用素超関数を未知とする。

＜解の存在について＞

一部の非線型分散型方程式はいわゆる逆散乱法を用いることで解析的に解を求めることができるが、それ以外の方程式（本研究で考察していく偏微分方程式を含む）は解析

的に解を求めることは不可能である。

そこで、関数解析的手法等（縮小写像の原理、調和解析学）を用いて、解の存在定理を理論的に求めることが重要となる。更に、時間大域解の時刻無限大に於ける漸近挙動を調べることは、純粋数学のみならず、物理学や工学的にも本質的な課題であると言える。

＜散乱問題＞

時間大域解が時刻無限大で自由解（摂動項が無い方程式の解）へ漸近する場合、非線型項は「短距離型」であるという。更にこのとき波動作用素並びに散乱作用素の存在が期待される。非線型項が短距離型であることや散乱作用素の存在は、非線型効果が限定的であることを指し、諸現象の理解を深める上で重要な鍵となる。

散乱の順問題とは、どのような非線型項であれば、短距離型になり散乱作用素が定義できるのかを吟味することである。

一方散乱の逆問題とは、散乱作用素の情報を用いて未知な非線型項を同定することである。言い換えると、「散乱作用素の集合」から「相互作用ポテンシャルの集合」への写像Ｍを吟味することである。特に「安定性」の議論は、「写像 Ｍ における（適当な意味での）連続性の吟味」と換言できる。

散乱の順問題及び逆問題は、当初は線型分散型方程式について考察されてきたが、近年はそれに加え非線型分散型方程式についても研究されている。

これらの研究は 1960 年代以降盛んに行われ、重大な定理が数多く証明されているが、未だに解決されていない問題も山積している。

非線型Klein-Gordon方程式や非線型Dirac方程式は非線型Schroedinger方程式に比べ、証明に使えそうな道具が不足している為、未解決部分が多く今後の解明が強く期待されている。

量子場に関する線型 Klein-Gordon 方程式に関しては、殆ど未開拓の分野と言って良く、今後の発展が望まれている。

２．研究の目的

(1) 未知なポテンシャルV(x)を含んだ非線型を持つ分散型方程式(例:Hartree方程式、Semirelativistic Hartree方程式)について、散乱作用素の情報から、V(x)を一意に再構成する手法を発見すること。また、安定性に関する評価式を求めること。

(2) 量子場に於ける Klein-Gordon 方程式に対する散乱の順問題と逆問題について、古典場の場合(言い換えれば通常のKlein-Gordon方程式）との比較を行うこと。

(3) 冪乗型の非線型項またはHartree型の非線型項を持つKlein-Gordon方程式やDirac方程式に対する散乱の順問題を考察し、短距離型になる非線型項の条件を求めること。

３．研究の方法

(1) 調和解析学、双曲面上の幾何学、関数空間（Lebesgue空間、Sobolev空間、Besov空間等）の諸理論、スペクトル理論を用いて研究を行う。

(2) 非線型Schroedinger方程式の散乱問題に於いては、Galilei変換の生成作用素Ｊが有効である。このＪを適当に修正することで、非線型Klein-Gordon方程式の散乱問題へ応用できることが近年判明している。本研究では、修正されたＪを詳細に解析し種々の方程式へ応用していく。

(3)得られた手法を更に改良することで、様々な非線型偏微分方程式の重要な未解決問題への応用を図る。

(4)得られた研究成果は、研究集会・学会での発表、国際学術雑誌への投稿・掲載を通して周知させる。

４．研究成果

(1) 空間３次元のHartree方程式に於ける散乱の逆問題を考察した。

Hartree方程式は非線型Schroedinger方程式の一種であり、非線型項は、「相互作用ポテンシャル V(x)と未知関数の絶対値の二乗との合成績」と「未知関数」との積で構成されている。

Hartree方程式は、「V(x)を相互作用ポテンシャルとする非相対論的素粒子の多体Shcroedinger方程式」を近似して得られるものであるから、相互作用ポテンシャル V(x)を同定する問題は本質的である。

この方程式に含まれる未知な相互作用ポテンシャルV(x)が「指数関数的に減少する」という条件を満たすとき、散乱作用素の情報を用いて V(x)を一意に再構成できることを証明した。更に、安定性に関する評価式を得ることができた。以下に詳細を記す：

（再構成について）V(x)は指数関数exp(m|x|)を掛けても可積分であるとする。（注１：V の Fourier 変換 FV は実解析的となる。注２：湯川ポテンシャルはこの条件を満たす。）このとき、「FV の原点における任意階数の偏微分係数を求める公式」が得られる。FV は実解析であるため、Taylor 展開によって、或る原点近傍上で FV が一意に再構成できる。FV に対して、各点を中心とする Taylor 級数の収束半径は一様に下から評価できることから、Taylor 展開を繰り返すことにより全空間上で FV を一意に再構成できる。

（安定性について）未知な相互作用ポテンシャル V1 と V2 に対する散乱作用素をそれぞれ S1 と S2 とおく。S1 と S2 との差が十分小さいとき、V1 と V2 との差が（適当な意味で）十分小さくなることを証明した。

証明の鍵となるのは、入射データ（関数）に対する非等方的スケール変換である。

(2) 量子場に関する線型 Klein-Gordon 方程式に於ける散乱の順問題と逆問題について考察した。

この方程式は通常の偏微分方程式と異なり、作用素値超関数を未知とする関数方程式であり、扱いが困難である。

本研究では、古典場の理論をボソン・フォック空間上に適切に応用することで、通常の線型 Klein-Gordon 方程式と同様の結論が得られることを証明した。（鈴木章斗氏（信州大学）との共同研究である。）

具体的には、「線型 Klein-Gordon 方程式を構成するポテンシャル並びに外力項 f が、散乱データの情報を用いることで一意に同定できること」及び「外力項 f が、時間変数のみに依存する関数 g と空間変数のみに依存する関数 h との積で書かれ、g と h のどちらか一方が既知であるとき、もう一方が一意に再構成できること」が証明された。

(3) 1 次元非線型 Dirac 方程式に於ける散乱の順問題について考察した。

非線型項は冪乗型とした。自由 Dirac 方程式の時間減衰評価を用いると、冪の指数 p が 3 より大きければ非線型項は短距離型になるものと推測できる。この推測は、Schroedinger 方程式や Klein-Gordon 方程式における同様の問題に対しては、実際に正しいことが示されている。一方で Dirac 方程式に対しては、非線型項が持つ構造の難しさ故に未解決であった。

p が 5 以上であるときは、時空評価の一種である Strichartz 型評価と Sobolev の埋め込み定理を併用することで「適当な Sobolev 空間の或る 0 近傍上で、散乱作用素が定義できること」が直ちに証明できる。

一方、5 未満の場合はその手法のみでは同様の定理は証明できない。そこで、Galilei 変換の生成作用素 J を Dirac 方程式に適合するように修正し、先述の手法と併せることで「適当な重み付 Sobolev 空間の或る 0 近傍上で、波動作用素が定義できること」及び「（少し弱い意味で）散乱作用素が定義できること」を証明することができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

①H.Sasaki, Scattering problems for the one-dimensional nonlinear Dirac equation with power nonlinearity,
Journal of Physics: Conference Series, 査読有, 410, 2013, 012035.
http://iopscience.iop.org/1742-6596/410/1/012035

②H.Sasaki, Inverse scattering problems for the Hartree equation whose interaction potential decays rapidly,
J. Differential Equations, 査読有, 252, 2012, 2004-2023.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039611002798

③H.Sasaki and A.Suzuki, An inverse scattering problem for the Klein-Gordon equation with a classical source in quantum field theory,
Hokkaido Math. J., 査読有, 40, 2011, 149-186.
http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&page=toc&handle=euclid.hokmj/1310042825

〔学会発表〕（計２件）

①佐々木 浩宣, Scattering problems for the one-dimensional nonlinear Dirac equation with power nonlinearity,
日本数学会 2012 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 九州大学, 2012 年 9 月 20 日

②佐々木 浩宣, 急減少する相互作用ポテンシャルを持つ Hartree 型方程式の逆散乱問題,
日本数学会 2011 年度年会函数方程式論分科会, 早稲田大学, 2011 年 3 月 22 日

〔その他〕

ホームページ等（研究成果記載）
http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~sasaki/J-re.html

６．研究組織
(1)研究代表者
佐々木　浩宣（SASAKI HIRONOBU）
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00568496

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者 なし