様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２２日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2010～2012
課題番号：22740085
研究課題名（和文）　等質有界領域と等質錐の幾何学的研究

研究課題名（英文）　Geometric research on homogeneous bounded domains and homogeneous convex cones

研究代表者
甲斐　千舟（KAI CHIFUNE）
金沢大学・数物科学系・助教
研究者番号：70506815

研究成果の概要（和文）：本研究では複素ユークリッド空間の等質有界領域や、それをジーゲル領域と呼ばれる上半平面型の領域として実現する際に現れる等質錐の研究を、幾何学的な観点から行った。特に等質錐や、より一般に正則錐において自然に誘導される因果構造に着目して研究を進めた。その結果、等質錐だけでなく一般に正則錐においても、その上の因果自己同型写像は線型なものに限られるという定理を得た。

研究成果の概要（英文）：From a geometric point of view, we studied homogeneous bounded domains in complex Euclidean spaces and the associated homogeneous convex cones appearing in the definition of Siegel domains. In particular, we focused on causal structures naturally introduced on homogeneous convex cones or regular convex cones. It turned out that a causal automorphism on a regular convex cone is linear.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：複素幾何学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：等質有界領域、等質錐、ジーゲル領域、因果構造、対称錐

１．研究開始当初の背景

非常に高い対称性をもつ空間を対称空間という。対称空間は、その高い対称性を反映して、数多くの興味深い性質をもつ。対称空間には様々なタイプがあるが、その中でも、複素ユークリッド空間の有界領域として実現される対称有界領域は、数学だけでなく物理などでも様々な分野に現れる、重要な対象である。

一方で、対称空間ほどではないものの、ある程度の高い対称性をもつ空間は等質空間と呼ばれる。対称空間は等質空間の特別な場合であり、特に、対称有界領域を一般化したものが、等質有界領域である。

等質有界領域にはリー群の作用があるた

め、等質有界領域は表現論の観点からも興味深い。また、複素ユークリッド空間の有界領域の具体例として、複素解析学、複素幾何学においても重要な対象である。このように等質有界領域は、それ自体が重要なものであるが、対称有界領域と対比させることも、意義のあることと考えられる。すなわち、対称有界領域のもつ重要な性質が、一般的に等質有界領域でも成り立つのかどうか調べることによって、その性質に対する理解を深めることができ、対称有界領域をより一層理解することにつながる。本研究の研究代表者である甲斐は、このような観点から、対称有界領域のもつ性質が等質有界領域でも成り立つ、という一般化や、等質有界領域がどのような場合に対称有界領域となるか、という特徴付けの研究を中心に、等質有界領域の研究を進めてきた。

しかし、対称有界領域については様々な研究成果が知られている一方で、それに比べると、等質有界領域の研究は遅れている。その原因の一つは、対称有界領域に対して有効な道具の多くが、等質有界領域に対しては使えなさそうである、という観測があると思われる。確かに、そのようなことは多いが、しかし一方で、リー群論的・代数的な道具だけでなく、複素解析的な手法を組み合わせることによって、等質有界領域の研究に新しい視点がもたらされる可能性のあることが、甲斐の以前の研究（野村隆昭氏、伊師英之氏、大沢健夫氏との共同研究を含む）によって明らかになった。例えばその一つは、対称有界領域が単位円板の一般化であるハリシュ・チャンドラ実現と呼ばれる有界領域として実現されるように、等質有界領域も、代表領域（あるいはケイリー変換の像）という性質の良い有界領域として実現される、ということである。

このような状況において、本研究では、以前の研究で得られた手法なども用いて、対称有界領域との対比を中心として、等質有界領域の研究を進めている。

２．研究の目的

本研究の主な目的は、対称有界領域のもつ重要な性質が、等質有界領域でも成り立つのかどうかを解明し、それによって、等質有界領域や対称有界領域に対する理解を深めることである。より具体的には、本研究では特に、因果構造と呼ばれる幾何的構造に着目して研究を行った。

ここで因果構造について説明する。直線を含まない錐を正則錐という。多様体の各点における接平面に正則錐が埋め込まれていて、しかも多様体上で点を動かしたときに、その点における正則錐も滑らかに動くとき、この正則錐の集合を因果構造と呼ぶ。また、因果構造の入った多様体を因果多様体と呼ぶ。その正則錐がローレンツ錐である時を参考に考えれば、錐の内部にある点は錐の頂点よりも未来にあると考えることができる。つまり因果多様体では、各点において未来と過去の方向が与えられていると捉えることができる。因果多様体は、相対性理論に関する研究に登場し、また、ドイツのグループによっても研究が進められた。最近では、例えば金行壮二氏によって研究が行われている。金行氏は、多様体の自己同型写像で因果構造を保存するもの（これを因果自己同型写像と呼ぶ）に着目し、様々な興味深い定理を得た。このように、ある幾何構造を調べる際に、その幾何構造を保存する自己同型写像を調べるということが、数学の研究ではしばしば行われる。

本研究では、金行氏が対称有界領域の因果自己同型写像群に関する研究の中で得た次の定理に注目した：「対称錐の因果自己同型写像は線型なものに限る」。ここで対称錐とは、対称有界領域を上半平面型の領域として実現する際に現れる錐であり、それは自然な因果構造をもつ。いま述べた定理は、因果構造を保つという性質によって写像の形がほぼ決定される、というものである。

金行氏の定理は、対称錐という、対称有界領域に付随する正則錐を扱っている。一方で、等質有界領域を上半平面型の領域として実現する際にも、等質錐と呼ばれる正則錐が現れる。そこで本研究では、金行氏の定理と同様の定理が、等質錐に対しても成り立つかどうか、すなわち、等質錐の因果自己同型写像が線型であるかどうか、を調べた。もしこれが正しいとすれば、対称錐よりもはるかに多く存在する等質錐でも、対称錐と同様の性質が成り立つという意味で興味深い。あるいは仮に、そのような性質が対称錐でしか成立しないとすれば、等質錐の中で対称錐を特徴付ける性質が見つかったということになり、これも意義のあることと考えられる。

そして本研究の次の目的は、等質錐の因果構造に関する研究を足掛かりとして、等質有界領域の因果構造に関する研究につなげていくことである。等質錐に自然な因果構造を入れたものは、いわば平坦な因果多様体であり、一般の因果多様体とは隔たりがある。そこでその隔たりを埋めるための第一歩として、本研究では、等質錐全体ではなく等質錐の一部分を局所的に切り取って、そこでの因果自己同型写像を考察することを次の目的とした。もしこのステップが進展すれば、等質な因果多様体の局所的な構造を理解するのに役立つはずであり、大域的な構造を理解するのにも有益であろうと予想される。

３．研究の方法

金行氏は対称錐の因果自己同型写像の線型性を直接証明したのではなく、対称有界領域の因果構造に関する因果自己同型写像群の構造定理をまず構築しておき、そこから得られる系の一つとして、線型性の定理を証明したのであった。「１．研究開始当初の背景」で述べたように、対称有界領域の一般化である等質有界領域に対する理解を深めるという立場からすれば、対称有界領域の因果自己同型写像群の構造定理を、等質有界領域のそれに関する構造定理に拡張しておき、そこから、等質錐の因果自己同型写像の線型性を調べる、という道筋が望ましい。しかし、構造定理の一般化はそれほど簡単なものではないと考えられるので、本研究では、等質有界領域の因果自己同型写像群に関する考察を経ずに、直接、等質錐の因果自己同型写像の線型性を調べる、という方法をとることにした。

まず、対称錐の因果自己同型写像が線型になることの背景を、対称錐の典型例である３次元のローレンツ錐で探る。これは実３次元空間内の対象なので、実際に図形的な考察を行うことが可能である。

このようにして３次元ローレンツ錐で考察を深めたのち、一般次元のローレンツ錐に考察の対象を広げ、さらに次に、等質錐へと考察を進める。可能であれば、等質とは限らない正則錐へと、さらに一般化できることが望ましい。

４．研究成果

「３．研究の方法」で述べたように、対称錐の典型例である３次元ローレンツ錐で図形的考察を行った結果、錐の端射線に着目することが有用であるらしいという感触を得た。ここで端射線とは、側面の中で角をなしている（尖っているような）母線のことである。

3 次元ローレンツ錐で因果自己同型写像が与えられたとすると、それは端射線を端射線に写す、ということが図形的考察によってわかる。錐内部の点で、端射線上にないものについては、まずミンコフスキーの定理によって、その点を端射線上にある点の一次結合で表すことができる。これを用いて考察を進めると、端射線上の点の一次結合で表される点の因果自己同型写像による像は、それぞれの端射線上の点の像の一次結合となることがわかった。このようにして、3 次元ローレンツ錐の因果自己同型写像の線型性は、各端射線上での写像の線型性から証明できることが判明した。さらに、この各端射線上での写像の線型性は、異なる端射線を複数とって極限操作をすることによって証明できることも明らかとなった。

3 次元ローレンツ錐で発見したこのような線型性の証明方法は、一般の次元のローレンツ錐や、一般の対称錐にも適用できるものであった。また、その後の研究で、等質錐にも適用できることが判明した。

これで当初の目的としていた、等質錐の因果自己同型写像の線型性は証明することができた。しかしながら、さらに研究を進めるにつれて、等質錐より一般の正則錐においても、因果自己同型写像の線型性が証明できるのではないか、と考えるに至った。そこで、証明の最終ステップで端射線に関する極限操作を行うために必要であった、正則錐が孤立した端射線をもたないという条件を用いない証明方法を模索した。

その結果、当初の証明方法を大幅に改良し、正則錐が孤立した端射線をもつ場合でも、因果自己同型写像の線型性を証明することができた。これによって、多角錐をはじめとする、ほぼすべての正則錐に対して、線型性の定理が得られた。これで、平坦な因果構造をもつ因果多様体の問題はほぼ解決できたといえる。

次に、「２．研究の目的」で述べたように、平坦とは限らない一般の因果多様体に関する研究への足掛かりとすべく、正則錐を局所的に切り取って、そこでの因果自己同型写像を考察した。その結果、先に得た線型性定理の証明方法のほとんどのステップは、局所的な問題でも有効であることが判明した。ただし、ある一つのステップは改良が必要であり、そこでは、ある局所的な条件を満たす因果自己同型写像が線型なもの以外にはほとんど存在しないことを示さなければならない。その局所的な条件を満たすものがどれくらい存在するか、計算機による具体例の計算も交えて研究を進めているが、まだ解決には至っておらず、今後の課題となっている。

以上で得られた、正則錐の因果自己同型写像の線型性定理に関する成果を学術論文にまとめつつ、局所的な問題の研究を進めているところである。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計４件）

① <u>甲斐千舟</u>、正則凸錐の順序自己同型写像の線型性、表現論と調和解析における諸問題、2011 年 6 月 29 日、京都大学数理解析研究所（京都府）

② <u>甲斐千舟</u>、正則凸錐の順序自己同型写像

の線型性、第５０回実函数論・函数解析学合同シンポジウム、2011 年 8 月 9 日、東京女子大学（東京都）

③ 甲斐千舟、正則凸錐の順序自己同型写像の線型性、日本数学会 2011 年度秋季総合分科会、2011 年 9 月 30 日、信州大学理学部（長野県）

④ Kai. C, The linearity of order isomorphisms on regular convex cones, Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, 2011.12.15, El Mouradi Palace Hotel (Tunisia)

６．研究組織

(1)研究代表者

甲斐　千舟（KAI CHIFUNE）
金沢大学・数物科学系・助教
研究者番号：70506815

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし