

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 23 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740087

研究課題名(和文)フェルミオンとボソンの相互作用系のスペクトル解析

研究課題名(英文)Spectral analysis of a fermion interacting with a bose field

研究代表者

佐々木 格(SASAKI, Itaru)

信州大学・理学部・助教

研究者番号：50558161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：量子力学系のスペクトルを解析した。この研究のメインの結果は1個の準相対論的な荷電粒子が光と相互作用する系のハミルトニアン基底状態エネルギーを解析したものであり。適切な条件のもとでこの系のイオン化エネルギーが真に正であることを証明した。また、量子系に対するエルゴード性やリュウビルの定理、非可換調和振動子のエネルギー固有値の一意性やその交差、階数1の摂動を持つ離散シュレディンガー作用素のスペクトルの解析を行った。

研究成果の概要(英文)：The spectrum of various quantum systems are analyzed. The main result of this research is the analysis of the quantum system of a charged particle interacting with a quantized radiation field. It is proved that the ionization energy of the system is strictly positive. Moreover, we made a study of the ergodicity and the Liouville's theorem for a quantum dynamics, the uniqueness or crossing property of eigenvalues of the non-commutative harmonic oscillators, spectral analysis of the discrete Schrodinger with rank one perturbation.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：スペクトル解析 関数解析 量子場 量子電磁力学 相対論的シュレディンガー作用素

1. 研究開始当初の背景

フェルミ場と量子ボース場の相互作用系の典型例である量子電磁力学 (QED) においては、フェルミ場は荷電粒子、ボース場は光 (量子電磁場) を記述する。このような量子場のモデルの数学的研究は、これまでは、主に Pauli-Fierz モデルと呼ばれる粒子を非相対論的に取り扱うモデルに対して行われてきた。これは、QED の近似のモデルの一つである。このモデルのハミルトニアンをヒルベルト空間に作用する自己共役作用素として定義することが可能であり、そのスペクトルが様々な方法により研究されてきた。そして、2000 年前後に基底状態の存在、共鳴極の存在などが証明された。物理的には、基底状態の存在は原子の安定性を意味し、共鳴極の存在は非摂動はミルトニアンの固有値の不安定性を意味する。他にも、散乱理論などが研究され、少しずつ研究は進展してきた。そこで、次に興味の対象となったのが、Pauli-Fierz モデルにおいて、電子を相対論的シュレディンガー作用素に置き換えて作られる準相対論的 Pauli-Fierz モデルである。このモデルのスペクトルの研究は、近年始まったばかりであり、Pauli-Fierz モデルに対して、開発された解析手法や、得られた結果がどこまでこのモデルに対して適用可能かを示すことが当時の課題の一つであった。特に、基底状態の存在を証明すること及び散乱理論を構成することは重要な問題であった。

2. 研究の目的

相対論的シュレディンガー作用素で記述される粒子と、量子電磁場の相互作用系である準相対論的 Pauli-Fierz モデルのハミルトニアンのスペクトルを研究することが主な目的である。このモデルでは、非相対論的なモデルとは異なり、粒子も光も光速度を超えないため Pauli-Fierz モデルとは異なる性質が表れることが期待される。特に、チェレンコフ放射のような現象は起こらないと考えられるので、光と自由荷電粒子が作る安定状態がすべての運動量で存在すると予想されている。しかし準相対論的 Pauli-Fierz モデルの解析はまだ始まったばかりであり、当面は、Pauli-Fierz モデルと同様の解析を行うことができるのかどうか課題となる。最初の目標は、固定された核子によるポテンシャルを導入したときに、粒子と光との束縛状態が基底状態として現れるかどうかを調べる事であった。このモデルの難しさはハミルトニアンが作用素の平方根を含むことであり、そのような作用素に対する解析手法を新たに開発すること自体も研究の目的となる。

3. 研究の方法

(1) Pauli-Fierz モデルに対して開発された Pull-through 公式や局在評価の不等式が準相対論的 Pauli-Fierz モデルに対して成り立つかどうか調査した。核子による引力ポテ

ンシャルを入れたときに基底状態のエネルギーが真に減少するという不等式の証明を試みた。このタイプの不等式は束縛条件と呼ばれており、基底状態の存在を証明するために利用できる可能性がある。また、荷電粒子が多数存在する系に対しても束縛条件が成り立つかどうかを調査した。

(2) Levy 過程を用いて光子に仮想的な質量を持たせた系の基底状態の解析を行った。特に、Levy 過程を用いて基底状態に対する Carmona 型の指数減衰の証明が示せるかどうかを調査した。

(3) Pauli-Fierz モデルで開発された手法を、その他の量子系へ応用した。具体的には、非可換調和振動子と呼ばれている量子系の基底状態の解析のために、Pull-through 公式を適用した。また、非可換調和振動子のスペクトルに対する数値計算法について取り組んだ。

(4) その他、上述の準相対論的 Pauli-Fierz モデルの解析が困難になったので、その周辺分野であるシュレディンガー作用素のスペクトル解析や量子系のダイナミクスの一般論などを研究した。

4. 研究成果

(1) 1 粒子の準相対論的 Pauli-Fierz モデルに対する束縛条件を証明した。具体的には、粒子系のハミルトニアン、すなわち核子によるポテンシャル $V(x)$ を持つ相対論的シュレディンガー作用素が負エネルギーの基底状態を持つと仮定したとき、準相対論的 Pauli-Fierz モデルの基底状態のエネルギーは、ポテンシャル V が 0 のときに比べて、粒子系の基底状態のエネルギー分以下に下がる事を証明した。この結果は、九州大学の廣島文生氏の協力を得て研究を行い証明された (下記の論文 1)。

(2) 量子系のダイナミクスについてポアンカレの再帰定理およびリュービルの定理を考察した (乙部徹己氏 (信州大学) との協力による研究、下記の論文 2)。コントロール集合のようなスペクトルを持つハミルトニアンについては、任意の状態に対して力学系の再帰性が成り立たないことを証明した。また、ハミルトニアンが純点スペクトルを持ち、固有値の多重度が有限な場合に、ヒルベルト空間上にガウス測度を構成し、時間発展の測度論的な性質を議論した。そこでは、エルゴード性やリュービルの定理と類似の定理が成り立つ事を示した。

(3) d 次元格子上的離散シュレディンガー作用素で、原点だけで値を持つようなポテンシャルを持つもののスペクトルを考察した (下記の論文 3)。その作用素は $[-1, 1]$ に絶対連続スペクトルを持つが、ポテンシャルの値がある具体的な臨界値を超えると固有値が絶対連続スペクトルの外側に現れることを証明した。さらに、ポテンシャルの値がちよ

うど臨界値にあるときには5次元以上では埋蔵固有値が現れ, 4次元以下では埋蔵固有値は現れないことを証明した。この研究は, 廣島文生氏(九州大学), 白井朋之氏(九州大学), 鈴木章斗氏(信州大学)らの協力を得て研究を行った。

(4) 非可換調和振動子と呼ばれる1次元量子系のハミルトニアンを考察し, その基底状態の多重度に対する不等式を得た。具体的には, 量子場の解析に対して開発されていた Pull-through 公式を非可換調和振動子の基底状態に対して適用する事によりその基底状態での個数作用素の期待値を上から評価することにより, あるパラメーターの範囲では基底状態は一意であることを証明した。この結果は, 廣島文生氏(九州大学)の協力を得て研究を行った。

(5) 非可換調和振動子基底状態は自明な縮退を除いて一意であることをすべての結合定数に対して証明した。これにより, 非可換調和振動子が導入されて以来, 十数年間の未解決問題が解決された。さらにハミルトニアンは4つの Jacobi 行列の直和に分解できることを示し, Jacobi 行列の固有値は縮退しないことと固有値の連続性から, 非可換調和振動子の固有値の交差は異なる Jacobi 行列の固有値の交差であることを証明した。さらに, 固有値に対する信頼できる計算法を確立した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5件)

1. Fumio Hiroshima, Itaru Sasaki, Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators: The lowest eigenvalue and no crossing, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 415, 595-609, (2014)
DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.01.005
2. Fumio Hiroshima, Itaru Sasaki, Multiplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators, Kyushu Journal of Mathematics, 67, (2013), 255-266.
DOI: 10.2206/kyushujm.67.355

3. Fumio Hiroshima, Itaru Sasaki, Tomoyuki Shirai, Akito Suzuki, Note on the spectrum of discrete Schrodinger operators, Journal of Math-for-Industry, Vol. 4(2012B-4), pp. 105-108, (2012).
URL:
<http://j-mi.org/articles/view/273>
4. Yoshiki Otobe and Itaru Sasaki, Measure theoretical approach to recurrent properties for quantum dynamics, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, No. 44, pp. 465209(1)-465209(10), (2011).
DOI:10.1088/1751-8113/44/46/465209
5. Fumio Hiroshima, Itaru Sasaki, On the ionization energy of semi-relativistic Pauli-Fierz model for a single particle, RIMS Kokyuroku Bessatsu B21, 25-34, 2010-12.
URL:
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/177030/1/B21-03.pdf>

[学会発表](計 16件)

1. 佐々木 格, 準相対論的 Pauli-Fierz モデルのスペクトル解析 I, II, RIMS 研究集会『作用素環とその周辺分野の発展』, 2014年1月29日, 京都大学
2. Itaru Sasaki, On the dressed electron state in the semi-relativistic Pauli-Fierz model, RIMS 研究集会『量子場の数理とその周辺』, 2013年10月2日, 京都大学.
3. 佐々木 格, 準相対論的 Pauli-Fierz モ

- デルにおける束縛条件, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学.
4. 佐々木 格, 非可換調和振動子の固有値の多重度と Jacobi 行列, 2013 日本数学会秋期総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学.
 5. Itaru Sasaki, Binding condition of the many body semi-relativistic Pauli-Fierz Model, RIMS 研究集会『Applications of Renormalization Group Methods in Mathematical Sciences』, 2013 年 9 月 13 日, 京都大学.
 6. Itaru Sasaki, Multiplicity of eigenvalues of the non-commutative harmonic oscillator, International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future Prospects, 2013 年 8 月 6 日, 北海道大学.
 7. Itaru Sasaki, Multiplicity of Ground State of Non-Commutative Harmonic Oscillators, International Conference on Mathematical Sciences and Statistics (ICMSS2013), Sunway Putra Hotel, Kuala Lumpur, 2013 年 2 月 5 日, クアラルンプール (マレーシア).
 8. Itaru Sasaki, Multiplicity of the ground state of non-commutative harmonic oscillators, 研究集会『非可換調和振動子のスペクトルと量子デバイスの数理』, 2012 年 11 月 27 日, 九州大学・数理学研究院.
 9. Itaru Sasaki, On the ground state of the semi-relativistic Pauli-Fierz model, RIMS 研究集会『Mathematical Quantum Field Theory and Related Topics』, 2012 年 11 月 15 日, 京都大学.
 10. Itaru Sasaki, 相対論的 Pauli-Fierz モデルのスペクトル解析について, 2012 年夏の作用素論シンポジウム, 2012 年 9 月 8 日, 新潟大学 駅南キャンパス「ときめいと」講義室 A.
 11. Itaru Sasaki, Enhanced binding for the relativistic many body Nelson model, Spectral Theory and Differential Equations (STDE-2012), 2012 年 8 月 24 日, ハリコフ(ウクライナ).
 12. Itaru Sasaki, Binding energy for a general class of quantum field Hamiltonian, The Fourth International Conference on Mathematical Sciences - ICM2012, 2012 年 3 月 11 日, Al-Ain(UAE).
 13. Itaru Sasaki, Binding condition for the general class of quantum field Hamiltonians, RIMS 研究集会『スペクトル散乱理論とその周辺』, 2011 年 12 月 15 日, 京都大学.
 14. Itaru Sasaki, Enhanced Binding for the Semi-relativistic Nelson Model, RIMS 研究集会『Applications of the Renormalization Group』, 2011 年 9 月 13 日, 京都大学.
 15. Itaru Sasaki, Binding energy of the semi-relativistic Pauli-Fierz model, Fourth School and Workshop on Mathematical Methods in Quantum Mechanics, 2011 年 2 月 15 日, Bressanone(Italy).
 16. Itaru Sasaki, On the ionization energy of the semirelativistic Pauli-Fierz model, QMath11(Mathematical Results in Quantum Physics), University of Hradec Kralove(Czech), 2010 年 9 月 9 日, Hradec Kralove(Czech)
- 〔その他〕
 ホームページ等
<http://math.shinshu-u.ac.jp/~isasaki/index.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

佐々木 格 (SASAKI, Itaru)

信州大学・理学部・助教

研究者番号 : 50558161