

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22740088

研究課題名(和文)非線形波動方程式の非線形項の幾何的構造と解の特異性

研究課題名(英文)geometric structure of nonlinearity and singularity of solutions for wave equations

研究代表者

津川 光太郎(Kotaro, Tsugawa)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：70402451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：様々なタイプの非線形双曲型・分散型波動方程式の初期値問題の適切性について調和解析的手法により研究を行った。二次の非線形項を持つシュレディンガー方程式に対して、これまで知られていた結果を改良し、より特異性の強い初期値に対して適切性を示すことに成功し、その結果をgood Boussinesq方程式に対して応用した。二次の非線形Dirac方程式やDirac-Klein-Gordon方程式系に対しては、非線形項の持つ null form の特性を有効に引き出すことが出来る関数空間を導入し適切性を示した。KdV方程式に対しては、初期値が準周期関数の場合について時間局所適切性を示した。

研究成果の概要(英文)：We studied the local and global well-posedness of the Cauchy problem for nonlinear dispersive equations and hyperbolic equations by the harmonic analysis. We improved the known results for a quadratic nonlinear Schrodinger equation and obtained the well-posedness result for low regularity data. The result is also applied to good Boussinesq equation. We showed the local well-posedness for nonlinear Dirac equation and Dirac-Klein-Gordon equation by using the property of null form. We also studied the Cauchy problem for the KdV equations with quasi periodic data.

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：分散型方程式 非線形 偏微分方程式 概周期関数 準周期関数 適切性 シュレディンガー方程式
ディラック方程式

1. 研究開始当初の背景

非線形双曲型波動方程式および非線形分散型波動方程式の初期値問題の様々な研究において、解の滑らかさの評価が鍵となる。その際に非線形項の影響を評価する事が重要であるが、近年の Klainerman による零形式を持つ非線形波動方程式の研究などにおいて、非線形項の幾何的構造に着目することにより良い評価が得られる事が分かった。これにより、それまでは取り扱いが難しかった型の方程式においても時間大域的適切性(解の存在、一意性、初期値に対する連続的依存性)が示されるなどの目覚ましい進展があった。非線形シュレディンガー方程式やザハロフ方程式や Korteweg-de Vries 方程式など、物理に現れる重要な方程式は、特殊な構造を持つ非線形項を持つ。これを上手く利用した評価を導くことにより、解の滑らかさや時間大域的減衰評価などについて大きな発展が見込まれる。

2. 研究の目的

非線形の分散型・双曲型波動方程式の初期値問題の適切性および時間大域的な解の振る舞いについて考える。波動方程式は解の平滑化作用を持たないため、解の持つ特異性は時間がたっても消えることは無く、さらに非線形相互作用により特異性が強まる可能性がある。そのため、特異性の強い解を含むクラスにおける研究は難しい。しかしながらディラックのデルタ関数の場合など、特異性の強い関数を考えることが重要な場合も多い。特に物理や工学に現れるモデル方程式の場合には非線形項が特殊な構造を持つことが多く、その性質を利用することによって特異性が強め合う効果を取り除くことが出来ると期待できる。本研究では非線形項の持つ幾何的構造に着目することにより特異性を取り除き、初期値問題の適切性を得ることが目的である。具体的には、初期値として与える関数を指数 s のソボレフ空間の元とし、出来るだけ小さな s に対して初期値問題の適切性を示すことを目標とする。これは特異性が強い関数をも含むより広い関数空間で解くことを意味する。

3. 研究の方法

近年、この分野の研究において調和解析的手法が注目を浴びている。本研究ではその中でも代表的な以下の三つの手法を用いて研究を行う。

(1) フーリエ制限ノルム法。1993年にブルガンにより開発された手法であり、解を構成するための関数空間として、方程式の線形部分に依存する形の重み関数を持つノルムが特徴である。これにより非線形相互作用において、方程式の線形部分の性質を良く反映した評価が可能となる。

(2) フーリエ制限ノルムの重み関数に修正を加える手法。特異性が強くて上記のフーリ

エ制限ノルム法だけでは取り扱えない場合において用いられる手法である。この手法を適用する際には対象とする方程式に応じて、どのような修正が効果的であるかを考える必要がある。そのための指針はまだ知られておらず、沢山の計算と職人的な感によって求めなければならない点が難しい。

(3) l-method. 上記の方法によって特異性の強い解の局所適切性が得られた場合、これを時間大域的に延長出来るかという問題が重要となる。エネルギーなどの保存則が利用できるような性質の良い解については容易に、時間大域的評価を得ることが出来るが、特異性が強い解の場合には難しい。l-method はそのための手法であり、周波数帯の間でのエネルギーの移動を精密に評価することにより時間大域的評価を得る手法である。

4. 研究成果

(1) 岸本氏との共同研究により二次の非線形項を持つシュレディンガー方程式の初期値問題について研究を行った。初期値を指数 s のソボレフ空間に属する関数とし、出来るだけ小さい s (つまり、特異性が強い関数) に対して適切性を示すという問題を考えた。同じ問題が1996年に Kenig-Ponce-Vega によりフーリエ制限ノルム法を用いて研究されてある。その結果は、未知関数の二乗や未知関数の複素共役の二乗や未知関数の絶対値の二乗という非線形項に対して、それぞれの s の値の下限は $-3/4, -3/4, -1/4$ であった。本研究では未知関数の絶対値の二乗の場合についての結果を $-1/2$ へと改良することに成功した。特異性を引き起こす原因が低周波部分と高周波部分の相互作用であることに着目し、低周波部分の指数 a と高周波部分の指数 s という二つの指数を持つソボレフ空間を導入した。この関数空間において a を大きくとることは低周波部分を削減することを意味する。そして、フーリエ制限ノルムの重み関数に修正を加えるという手法を用いることにより $-1/2 < a < 1/2, s \geq -(2a+1)/4$ の場合に時間局所適切であることを示した。この条件において a を $1/2$ に近づけた時の s の下限は $-1/2$ である。また、物理モデルに現れる good Boussinesq 方程式に対してこの結果を応用した。この方程式の非線形項は上記の低周波部分を削減する効果を持つものであるため、初期値は通常のソボレフ空間に属する関数のままで、 $s = -1/2$ での適切性が得られた。さらにこれらの結果がある意味最適の結果であることも示した。つまり、この条件より小さい s に対しては解写像の滑らかさが崩れるという反例をしめすことに成功した。

(2) 中西氏と町原氏との共同研究により、空間一次元における二次の非線形項を持つディラック方程式やディラック-クライン-ゴルドン方程式系および wave map の初期値問

題について研究を行った。これらの方程式は何れも非線形項が null form と呼ばれる特殊な構造を持つことが知られている。Klainerman を代表とする数多くの研究者により非線形項が null form で表されるタイプの双曲型方程式の研究がなされており、特異性を相殺する効果が知られている。しかし、空間一次元の場合には、その効果を完全に引き出すことには成功していなかった。本研究では、null form に対して通常用いられるノルムともフーリエ制限ノルムとも異なるタイプの重み関数を用いたノルムを解空間を構成するノルムとして用いることにより、null form による効果を最大限に利用することに成功した。これにより上記の方程式に対して臨界の指数を持つソボレフ空間において適切性が得られ、また、その値を下回る場合にはある意味非適切であることを示すことにも成功した。本研究成果は null form の構造を持つ他の波動方程式の研究にも役に立つであろうと期待できる

(3) Korteweg-de Vries 方程式について、初期値が準周期関数の場合に関する適切性の研究を行った。この方程式に対しては、初期値がソボレフ空間に属する場合についての適切性の研究が古くからなされており、非常に沢山の結果がある。しかし、それらのほとんど全てが、ある意味遠方で減衰しているタイプの関数か、周期関数の場合であった。準周期関数とは周期が 1 と周期が 2 のように無理数非の周期をもつ関数の組み合わせにより表される関数であり、遠方で減衰をせず、周期関数ともならない。そのため、これまでの手法を適用することは難しい。準周期関数を初期値とする場合の時間大域的適切性の問題は、ソリトン理論の研究者たちによって古くから注目を浴びているが、現在でも未解決の問題である。本研究では調和解析的観点から研究を行い、滑らかさの低い関数のクラスにおける時間局所適切性を示すことに成功した。より詳しく述べると、上記の 1 と 2 のように組み合わせる基本周期の数を N とした場合に、滑らかさの指数が $s > -1/2N$ であれば時間局所適切性が成り立つことを示した。これは、適切性を得るための条件が、基本周期の数に依存するという意味で面白い結果であり、また、 $N=1$ とすることにより周期関数の場合について Kenig-Ponce-Vega によって得られた $s = -1/2$ と一致するという点でも興味深い。また、滑らかさの指数がある条件を満たす場合には、解写像の滑らかさが崩れるという意味での非適切性の結果も得ることに成功した。その滑らかさの指数の条件は、基本周期の非を表す無理数が有理数によってどのようなオーダーで近似可能か？という整数論の問題と関連がある点も独特な結果である。本研究で用いられた手法を参考にして、様々なタイプの非線形分散型波動方程式の準周期関数を初期値とする初期値問

題の適切性の研究が発展すると期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

K. Tsugawa, Local well-posedness of the KdV Equation with quasi-periodic initial data, SIAM J. Math. Anal., 査読あり, 44-5 (2012), 3412--3428.

S. Machihara, K. Nakanishi and K. Tsugawa, Well-posedness for nonlinear Dirac equations in one dimension, Kyoto J. Math., 査読有り, 50 (2010), no. 2, 403--451.

N. Kishimoto and K. Tsugawa, Local well-posedness for quadratic nonlinear Schrodinger equations and the ``good'' Boussinesq equation, Differential Integral Equations, 査読有り, 23 (2010), no. 5-6, 463--493.

[学会発表](計 8 件)

K. Tsugawa, Local well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, the 19th Workshop on Differential Equations and its Applications, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, 2011 年 1 月 15 日

K. Tsugawa, Local well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, Analysis and Applied Math Seminar, University of Toronto, Toronto, 2011 年 10 月 14 日

K. Tsugawa, Local well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, Analysis seminar, Princeton University, Princeton, 2011 年 11 月 14 日

K. Tsugawa, Well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, 非線形偏微分方程式研究会, 福岡ガーデンパレス, 福岡, 2012 年 3 月 17 日

K. Tsugawa, Well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, 名古屋微分方程式セミナー, 名古屋大学, 名古屋, 2012 年 4 月 16 日

K. Tsugawa, Well-posedness of the KdV equation with almost periodic initial data, 京都大学 NLPDE セミナー, 京都大学, 京都, 2012 年 5 月 18 日

K. Tsugawa, Global well posedness of a stochastic KdV equation, 短期共同研究「非線形分散型方程式における最近の進展」, 京都大学数理解析研究所, 京都, 2012年5月23日

K. Tsugawa, Unconditional well-posedness of the fifth order modified KdV equation with periodic boundary condition, 研究集会「Workshop on Nonlinear Dispersive PDEs」, 東北大学大学, 仙台, 2012年8月29日

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
無し

6. 研究組織

(1) 研究代表者

津川 光太郎 (TSUGAWA KOTARO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：70402451

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：