

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 1 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22740090

研究課題名（和文） 非圧縮性粘性流体の局所構造に対する数学解析

研究課題名（英文） Mathematical analysis for local structures of viscous incompressible flows

研究代表者

前川 泰則（MAEKAWA YASUNORI）

神戸大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：70507954

研究成果の概要（和文）：水などの非圧縮性流体の運動においてはその渦度場が重要な役割を果たすことが知られている。本研究では、この渦度場に関連した非線形偏微分方程式を中心としてその数学解析を行った。特に、乱流中で普遍的に表れる微細な渦管構造と関連したある定常な流れの安定性解析、輸送項を伴う分数拡散方程式の基本解の研究、2次元半空間における渦度方程式の研究と高レイノルズ数極限への応用などについて研究を行い、それぞれのテーマにおいて成果を挙げることができた。本研究で得られたこうした成果は、偏微分方程式の解析や乱流における複雑な局所構造の解明に大きく貢献するものである。

研究成果の概要（英文）：It is well-known that vorticity fields play important roles in dynamics of incompressible flows. This research aims to analyze linear and nonlinear partial differential equations related with vorticity fields mathematically. The research in particular has made important contributions in the following topics: (i) Stability analysis of some stationary solutions modeling vortex tubes in turbulent flows; (ii) Estimates of fundamental solutions to fractional diffusion equations with a drift; (iii) Analysis of vorticity equations in the half plane and its applications to inviscid limit problem for the Navier-Stokes equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：偏微分方程式、流体力学、非圧縮性粘性流体、Navier-Stokes 方程式、渦度方程式、安定性解析、解の漸近挙動、境界層

1. 研究開始当初の背景

水などの流体の速度場は非圧縮性 Navier-Stokes 方程式によって記述され、これまで非常に多くの研究がなされてきた。し

かしながら、その複雑な非線形性から、特に 3次元の場合には解明されていない問題も多い。一方で、流体の局所的な振る舞いにはその渦度場が重要な役割を果たすことが知られている。渦度場の満たす方程式である渦度

方程式は、Navier-Stokes 方程式に curl 作用素を作用させることで形式的に得ることができる。渦度方程式そのものの数学的研究は、例えば時間局所的な強解や小さな自己相似解の存在を示した結果が知られていたが、Navier-Stokes 方程式に対する膨大な研究に比べるとむしろ少なく、未知の部分が多い。さらに渦度方程式の非線形項がもつ数学的構造は、2次元の場合でさえ近年新しい発見が成されるなど、今後さらなる進展が期待される分野であった。こうした状況に基づき、本研究では渦度場に関連した非線形偏微分方程式研究を行った。

2. 研究の目的

本研究では、水などの非圧縮性粘性流体の運動をその渦度場に着眼して解析することを目的としている。特に、乱流中の微細な渦管構造の生成と深く関わっている Burgers 渦と呼ばれる Navier-Stokes 方程式のある定常解の安定性を調べることで、境界付近での渦度場の生成メカニズムを数学的に調べることが大きなテーマである。

(1) 非圧縮性粘性流体のダイナミクスにおいて、粘性による拡散効果と渦度場の伸張効果という二つのメカニズムが基本的な役割を果たすことが知られている。1948年、Burgers は3次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対し、渦 Reynolds 数と呼ばれる渦度の大きさを表す物理量をパラメータとする定常解の族を発見した。この定常解は x_3 軸に関して対称であり、対応する渦度場は軸対称 Burgers 渦と呼ばれ、上に述べた二つのメカニズムのバランス状態を端的に表す解として調べられてきた。さらに近年、軸対称 Burgers 渦の周りに非軸対称な定常解（以降、軸対称の場合も含めて単に Burgers 渦と呼ぶことにする）が存在することも示されていた。

Burgers 渦は、単に特殊な定常解であるのみならず、流体が乱流状態になったときに典型的に現れる微細な渦管構造をよく近似することが数値計算や実験で指摘されるなど、流体の局所構造との関連が強く示唆されている。こうしたことから、Burgers 渦の安定性は物理的にも数学的にも重要な問題として研究されている。本研究の目的は、軸対称 Burgers 渦の3次元的な摂動に対する安定性を明らかにすることである。特に、3次元的な摂動を考察したときにあらわれる線形化作用素に対して、あらたな数学的構造を見出すことを目的とする。

(2) 非圧縮性粘性流体の渦度場は境界の影

響を考慮しない場合、数学的にも多くの研究がなされている。一方、境界の影響を考慮しなければならぬ状況においては2次元の場合であっても数学的な研究は非常に少ないのが現状である。その大きな理由として、渦度場の境界条件が非局所非線形となり、数学的な取り扱いが困難となることが挙げられる。本研究では2次元半空間という設定の下で渦度場をその境界条件も込めて詳細に調べ、境界付近における渦度場の数理解構を明らかにすることを目的とする。

3. 研究の方法

本研究を推進するためには情報収集や専門家との意見交換が重要であった。そのため、本研究の科研費により、必要となる偏微分方程式論や流体力学の専門書を多数購入した。また、京都大学での「流体と気体の数学解析」や北海道大学での「偏微分方程式札幌シンポジウム」など各研究集会に参加し、情報収集を行った。さらに、渦度方程式や Burgers 渦について先駆的な研究をされている東大の儀我美一氏や Fourier Institute (France) の Th. Gallay 氏等を訪れ、意見交換を行った。2009年9月から2010年3月にかけては、ミネソタ大学の IMA に長期滞在し、研究を行った。これらに伴う国内及び国外旅費に科研費を使用した。

4. 研究成果

1. 輸送項のついた分数階熱方程式の基本解の研究

消散型準地衡流方程式のように、非圧縮性粘性流体に関連した方程式には分数冪の拡散効果と速度場による輸送効果が取り入れられた方程式がある。このような方程式の解の局所的な性質を調べるため、大阪大学の三浦英之氏との共同研究を行なった。本研究の成果は2本の論文にまとめ、国際誌に投稿した。

2. 二次元外部領域における Navier-Stokes 方程式の解の時間大域的挙動の研究

二次元外部領域における Navier-Stokes 方程式は、期待される解の時間減衰が高次元の場合よりも遅く、時間大域的な解の振る舞いを調べる上で特有の難しさがあることが知られている。本研究では、Fourier Institute (Grenoble) の Th. Gallay 氏と共同研究を行い、初期渦度場が十分早く空間遠方で減衰し、か

つ総渦量が小さいときには、解が時間無限大で0seen渦に漸近することを証明した。これは全平面における既存の結果の自然な拡張となっているが、証明自体は新しいアイデアに基づいており、今後さらなる発展が期待される。研究成果は現在論文としてまとめられ、国際誌に受理された。

3. 二次元半空間における渦度方程式の数学解析

非自明な境界がある場合、非圧縮性粘性流体の渦度場は、その複雑な境界条件から二次元であっても数学的にはこれまでほとんど研究されてこなかった。本研究では、二次元半空間の場合の渦度場の数学解析を行った。特に、高レイノルズ数の極限での渦度場の振る舞いを調べ、初期時刻において渦度場が境界から離れた場所にある場合は、領域内部ではEuler流の渦度場に収束し、境界付近ではPrandtl流で記述される渦線を形成することを厳密に証明することに成功した。これは高レイノルズ数における流体の数学解析として非常に大きな成果である。研究成果は論文としてまとめられ、国際誌に投稿した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

① Maekawa, Y. and Miura, H. ; Upper bounds for fundamental solutions to non-local diffusion equations with divergence free drift, to appear in Journal of Functional Analysis.
(査読有, 受理済み)

② Gally, Th. and Maekawa, Y. ; Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity, to appear in Analysis and PDE.
(査読有, 受理済み)

③ Hsu, P.-Y. and Maekawa, Y. ; On nonexistence for stationary solutions to the Navier-Stokes equations with a linear strain, to appear in Journal of Mathematical Fluid Mechanics.
(査読有, 受理済み)

④ Maekawa, Y. ; Solution formula for the

vorticity equations in the half plane with application to high vorticity creation at zero viscosity limit, Advances in Differential Equations, 18 (2013) 101-146.
(査読有)

⑤ Kagei, Y. and Maekawa, Y. ; On asymptotic behaviors of solutions to parabolic systems modelling chemotaxis, Journal of Differential Equations, 253 (2012) 2951-2992.
(査読有)

⑥ Kagei, Y. and Maekawa, Y. ; Asymptotic behaviors of solutions to evolution equations in the presence of translation and scaling invariance, Journal of Functional Analysis, 260 (2011) 3036-3096.
(査読有)

⑦ Gally, Th. and Maekawa, Y. ; Three-dimensional stability of Burgers vortices, Communications in Mathematical Physics, 302 (2011) 477-511.
(査読有)

⑧ Maekawa, Y. ; Spectral properties of the linearization at the Burgers vortex in the high rotation limit, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 13 (2011) 515-532.
(査読有)

⑨ Maekawa, Y. ; On Gaussian decay estimates of solutions to some linear elliptic equations and their applications, Z. Angew. Math. Phys, 62 (2011) 1-30.
(査読有)

[学会発表] (計 13 件)

① Maekawa, Y. ;
On the inviscid limit problem for viscous incompressible flows in the half plane, Mathematical theory of turbulence via harmonic analysis and computational fluid dynamics
2012. 12. 7-8
Nagoya University.

② Maekawa, Y. ;
On the inviscid limit of the Navier-Stokes flows in \mathbb{R}^2_+ for initial vorticity located away from the boundary
Parabolic and Navier-Stokes equations
2012. 9. 2-8

Banach center (Poland).

③ Maekawa, Y.;

On fundamental solutions for fractional diffusion equations with divergence drift, RIMS 研究集会 異常拡散の数理
2012. 7. 18-19
京都大学数理解析研究所.

④ Maekawa, Y.;

On zero viscosity limit for the viscous incompressible flows in the half plane, RIMS 研究集会 流体と気体の数学解析
2012. 7. 4-6
京都大学数理解析研究所.

⑤ Maekawa, Y.;

Mathematical analysis on some coherent structures of vorticity fields for viscous incompressible flows, The 5th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics
2012. 6. 11-15
早稲田大学.

⑥ 前川泰則;

2次元半空間における渦度方程式の数学解析
2012年度日本数学会年会特別講演
2012. 3. 29
東京理科大学.

⑦ Maekawa, Y.;

On vorticity formulation for viscous incompressible flows in the half plane and its application to the inviscid limit problem
The 4th GCOE international symposium
2012. 2. 20-22
Tohoku University.

⑧ Maekawa, Y.;

On vorticity concentration at the zero viscosity limit for the Navier-Stokes flows in the half plane, Third China-Japan Workshop Mathematical Topics from Fluid Mechanics
2011. 10. 24-26
Northwest University
Xi' an (China).

⑨ Maekawa, Y.;

On spectral property of the linearization at self-similar solutions for parabolic systems modeling chemotaxis, The 4th MSJ-SI Nonlinear dynamics in partial differential equation, 2011. 9. 12-21,
Kyushu University.

⑩ Maekawa, Y. ; On estimates for fundamental solutions of diffusion equations related to non-local Dirichlet forms with BMO convections
拡散と移流の数理
2011. 1. 17-19
別府.

⑪ Maekawa, Y. ;

On semigroup with scaling invariance, The 7th International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems
2010. 12. 15-18
University of South Florida (USA).

⑫ Maekawa, Y. ;

On the a priori estimates for axisymmetric solutions to the Navier-Stokes equations, RIMS 研究集会 流体と気体の数学解析
2010. 7-9
京都大学数理解析研究所.

⑬ Maekawa, Y. ;

Asymptotic behaviors of solutions to evolution equations in the presence of translation and scaling invariance, Fourth Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations: Analysis, Computation and Applications
2010. 6. 11-14
National Taiwan University (Taiwan).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 70507954