

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月27日現在

機関番号：14501
 研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2010 ～ 2012
 課題番号：22740093
 研究課題名（和文）非線型ラプラシアンを含む発展方程式の解の漸近挙動
 研究課題名（英文）Asymptotic behavior of solutions for evolution equations involving nonlinear Laplacians
 研究代表者
 赤木 剛朗（AKAGI GORO）
 神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授
 研究者番号：60360202

研究成果の概要（和文）：様々な非線型問題に於いて、古典的な（線型）ラプラシアンの修正版である非線型楕円型作用素が現れる．本研究課題では，そのような非線型作用素を主要項に持つ発展方程式を考え，それらの解の漸近挙動とそのメカニズムを調べた．具体的には，変動指数を含む $p(x)$ -ラプラシアンや無限大ラプラシアンを含む拡散型方程式の解の長時間挙動を明らかにした他，fast diffusion 方程式の消滅解の漸近形の安定性解析の基盤となる理論を構築した．

研究成果の概要（英文）：In various nonlinear problems, we often encounter nonlinear elliptic operators as modified forms of the classical (linear) Laplacian. In this research, we consider evolution equations governed by such nonlinear operators and investigate asymptotic behavior of solutions and their mechanism. More precisely, we revealed long-time behavior of solutions for diffusion-type equations involving $p(x)$ -Laplacians with variable exponents and the infinity-Laplacian, and moreover, we also established a novel theory of stability analysis of asymptotic profiles for vanishing (in finite time) solutions of fast diffusion equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線型解析・発展方程式・解の漸近挙動・偏微分方程式・関数解析

1. 研究開始当初の背景

非線型ラプラシアンとは，線型のラプラシ

アンから派生した非線型楕円型微分作用素を指す。例えば p -ラプラシアンは非ニュートン流の運動や第Ⅱ種超伝導体の臨界状態を記述するモデルなどに現れる。

特に $p=2$ の場合、 p -ラプラシアンは通常のラプラシアンと一致する。

また、古典的なラプラス方程式は、ディリクレ積分のオイラー・ラグランジュ方程式であることが知られているが、 p -ラプラシアンもディリクレ積分を一般化して得られるある汎関数のフレッシュ微分として変分法的に定式化することができる。

一方、無限大ラプラシアンは「領域の境界上で定義されたリプシッツ連続関数を、リプシッツ定数になるべく小さくするように領域全体に拡張するにはどうすべきか？」という数学的問題に関連して導入され、その後、材料科学や画像処理などの研究分野でも用いられるようになった。

その他、地下水の浸透現象や核融合実験炉内のプラズマの特異拡散を表すことで知られる、多孔質媒体方程式や fast diffusion 方程式も拡散項に冪型の非線型項を含む。このように様々な分野に於いて、ラプラシアンを非線型化した非線型ラプラシアンが現れる。しかし非線型ラプラシアンを含む問題では、それらの強い非線型性が解析を困難にしており、線型のラプラシアンを用いた古典的なモデルや理論に比べると多くのことが分かっていない。

しかし、多くの分野に於いて、古典論からずれる部分の修正にこれらの非線型作用素を用いているため、非線型ラプラシアンに対する数学的理論の発展は必要不可欠であり、重要な数学的研究課題の一つとなっている。

2. 研究の目的

本研究では、非線型ラプラシアンを含む問題の解析を通して、それに有効な理論の構築を行う。具体的に言えば、非線型ラプラシアンを主要項に持つ非線型発展方程式の初期値問題もしくは初期値境界値問題を考え、解の長時間挙動、定常解への収束性とその収束レート、ならびに解の漸近形とその安定性・不安定性を明らかにし、更には非線型ラプラシアンを含む発展方程式の解の漸近挙動の解析に有効な解析手法の確立を目的とする。

3. 研究の方法

ここでは以下の各テーマについて取り組み、それぞれに現れる非線型ラプラシアンの特徴・性質を明らかにし、更にそれらを扱うための数学的手法・枠組みの開発を行う。

(1) p -ラプラシアンを含む発展方程式の解

の漸近挙動

(2) 無限大ラプラシアンを含む発展方程式の解の漸近挙動

(3) fast diffusion 方程式の消滅解の漸近形の安定性解析

(4) 変動指数を含む発展方程式の適切性と解の漸近挙動

ここで得られた結果は国内外の研究会・学会で発表し、関連分野の研究者と意見交換を行い、研究の更なる展開を探る。また結果をまとめて査読有の国際誌に投稿する。

4. 研究成果

以下では、「3. 研究の方法」で挙げた(1) - (4)のテーマに関して、研究期間中に得られた成果の概要を説明する。

(1) 非ニュートン流のモデルや第Ⅱ種超伝導現象の巨視的モデルなどに現れる p -ラプラシアンを主要項を含む非線型発展方程式の解の長時間挙動を明らかにした。特に $p>2$ の場合の解の減衰レートと解の漸近形について調べ、その上で漸近形の安定性に対する諸概念を導入し、実際に安定性を調べた。また、同様の解析を地下水の浸透モデル等に現れる多孔質媒体方程式に対しても行っている。

(2) ここでは正規化された無限大ラプラシアンを含む特異拡散方程式を取り上げ、その解の長時間挙動を明らかにした。同方程式は近年、Juutinen-Kawohl によって適切性や比較原理が証明された。

退化した無限大ラプラシアンを含む拡散方程式の解の長時間挙動は梶木屋 龍治 氏、Petri Juutinen 氏との共同研究で明らかになっているが、正規化された無限大ラプラシアンを含む特異拡散方程式に対しては結果が知られていなかった。

ここではバリア関数を用いた手法を改良し、解の長時間挙動を明らかにした。

特に、解の無限伝播性と呼ばれる線型の拡散方程式と共通の性質、そして初期値問題の解の減衰レートが空間次元に依存しないという異なる性質を持っていることを明らかにした。

更にこのような拡散現象が起こるメカニズムを説明するために、Einstein が用いたブラウン運動のモデルを形式的に拡張した。

その結果、各粒子に、粒子全体の密度関数の最大傾斜方向に1次元的なブラウン運動をさせることで、ここで扱う方程式の解が表す

拡散現象を再現できることが分かった。

(3) プラズマの特異拡散のモデル等に現れる fast diffusion 方程式のコーシー・ディリクレ問題では、古典的な拡散理論と異なり、解(密度分布)が有限時間で消滅する(ゼロになる)ことが知られている。

また消滅する解の漸近形がある楕円型方程式の非自明解として特徴づけられることが知られており、これらは fast diffusion 方程式が記述する拡散現象に於けるある種のノーマルモードとして認識されている。

ここではそのような消滅解の漸近形の安定性(摂動に対する耐久性)について研究した。しかし fast diffusion 方程式の場合、解の消滅時刻が解の初期値に依存するため、安定性の定義自体がこれまでなされていなかった。

本研究では、消滅解の安定性に関する諸概念を定義し、更にそれに基づいて各漸近形の安定性を判断するための枠組みを与えた。

漸近形の安定性の定義では、古典的な拡散方程式および退化拡散方程式などの非線型発展方程式の場合と異なり、エネルギー空間上のある超曲面を相集合とし、その上で定義された力学系を考える。

またここで導入する超曲面は解の消滅時刻が1になるような初期値の集合として与えられるため、初期値と解の消滅時刻の関係を詳細に知る必要がある。しかし、一般的にそれは困難であるため、消滅時刻の評価や連続性など断片的な情報から相集合を解析的・幾何的に解析する必要がある。

最終的には、漸近形を特徴づける楕円型方程式に付随するエネルギーに基づいて漸近形の安定性・不安定性を判断する分類定理を得た。

更にそれらの判定条件から漏れる幾つかのケースについても個別に解析し、特に円環領域に於ける球対称な漸近形が不安定になり得ることを突き止めた。

古典的な拡散方程式を球対称領域で考えた場合、漸近形は常に球対称であり、特に正值球対称な漸近形は漸近安定になる。

ここで得られた結果は、そのような古典的拡散理論では当然成り立つ性質が、fast diffusion 方程式に対しては成り立たないことを物語っている。

(4) 変動指数を含む $p(x)$ -ラプラシアンは、ER 流体と呼ばれる機能性流体のモデルや画像のノイズ除去のモデルに登場することで知られている。

非線型拡散の見地に立てば、場所によって拡散の性質が根本的に変化するようなモデルに対応できるため、これまでの非線型拡散方程式では記述できないような現象を記述す

ることができる。

また、複数の材質や相が混在しているような状態の記述をする際に変動指数を用いると、境界条件を導入せずにモデル化することができるため、工学的な応用を考える上でも有用である。

ここでは、そのような変動指数を含む発展方程式の例として、 $p(x)$ -ラプラシアンと呼ばれる p -ラプラシアンの変動指数版を含む方程式を考え、その適切性と解の漸近挙動を明らかにした。

変動指数を含む作用素は、 p -ラプラシアンと異なり、非一様な増大度を持つこと、また最適な有界性・強圧性の評価を得るには通常のルベグ空間やソボレフ空間の理論では不十分であり、変動指数を含む関数空間に対する理論が必要になる。

更に、上で述べたような混合システムの記述を考慮すると、不連続な変動指数を含む方程式を念頭に置く必要が出てくるが、不連続な変動指数に対してはイレギュラーな現象が多々知られており、解析は非常に繊細である。

ここで得られた結果を用いることで、常伝導体と第II種超伝導体が結合したシステムに対する巨視的モデルを、 $p(x)$ -ラプラシアンを含む発展方程式とその極限形として提案することができる。

今後の展開

これまでの研究では非線型ラプラシアンを含む発展方程式として、主に拡散系と Allen-Cahn 方程式などに代表される勾配系を扱ってきた。これらは線型のラプラシアンによって記述される古典的な枠組みから外れる非標準的なものである。

このように非線型性という数学的構造に着目して非標準的な拡散系・勾配系を扱ってきたが、物理などの研究では別な視点から非標準的な拡散系・勾配系が研究されている。

例えば、拡散の古典論では、拡散する粒子の平均2乗変位が時間に比例するが、比例しないような現象が多く知られており、それらは異常拡散と呼ばれている。

異常拡散のモデルでは、必ずしも非線型方程式が現れる訳ではない。

このように非線型性以外の視点から非標準的な拡散系・勾配系を捉えることは非常に重要であり、2013年度以降の科学研究費研究課題等で本格的に取り組むことが予定されている。

研究会などの開催

関連分野の研究者の交流や若手研究者の育成を目的として、以下のセミナー・研究集会を主催した。

①芝浦工業大学数理科学科・談話会 (2010 年度)

②研究集会「異常拡散の数理」(2012 年 7 月)

③ 国際会議「Functional Analysis and Applications」(2013 年 2 月)

その他, 2011, 2012 年度は神戸大学解析セミナーに於いて関連研究者を数回招致し, 講演を実施した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

①Goro Akagi, Kei Matsuura, Nonlinear diffusion equations driven by the $p(\cdot)$ -Laplacian, Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA), 査読有, vol.20, no.1, 2013, pp.37-64

②Goro Akagi, Stability and instability of group invariant asymptotic profiles for fast diffusion equations, "Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's" (R. Magnanini, S. Sakaguchi, A. Alvino Eds.), Springer INdAM Series, 査読有, vol.2, 2013, pp.1-16

③Goro Akagi, A global variational principle for nonlinear evolution, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, vol.1792, 2012, pp.40-56

④Goro Akagi, Ulisse Stefanelli, Periodic solutions for doubly nonlinear evolution equations, Journal of Differential Equations, 査読有, vol.251, no.7, 2011, pp.1790-1812

⑤Goro Akagi, Ulisse Stefanelli, Weighted energy-dissipation functionals for doubly nonlinear evolution, Journal of Functional Analysis, 査読有, vol.260, no.9, 2011, pp.2541-2578

⑥Goro Akagi, Global attractors for doubly nonlinear evolution equations with non-monotone perturbations, Journal of Differential Equations, 査読有, vol.250, no.4, 2011, pp.1850-1875

⑦Goro Akagi, Maximal monotonicity of the sum of two subdifferential operators in

Lp-spaces, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 査読有, vol.74, no.5, 2011, pp.1664-1671

⑧Goro Akagi, Doubly nonlinear evolution equations with non-monotone perturbations in reflexive Banach spaces, Journal of Evolution Equations, 査読有, vol.11, no.1, 2011, pp.1-41

⑨Goro Akagi, Kei Matsuura, Well-posedness and large-time behaviors of solutions for a parabolic equation involving $p(x)$ -Laplacian, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 査読有, a suppl. vol., 2011, pp.22-31

[学会発表] (計 7 件)

①赤木 剛朗, Doubly nonlinear parabolic equations involving variable exponents, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 実関数論分科会
九州大学, 2012 年 9 月 21 日

②赤木 剛朗, 梶木屋 龍治, Symmetry breaking of least energy solutions of Emden-Fowler equations, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 関数方程式論分科会
九州大学, 2012 年 9 月 19 日

③赤木 剛朗, 梶木屋 龍治, Symmetry and stability of asymptotic profiles for fast diffusion equations, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 関数方程式論分科会,
九州大学, 2012 年 9 月 19 日

④赤木 剛朗, 梶木屋 龍治, Fast diffusion 方程式の解の漸近形の安定性解析 (空間 N 次元の場合), 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 関数方程式論分科会, 信州大学,
2011 年 9 月 30 日

⑤赤木 剛朗, Ulisse Stefanelli, 二重非線型発展方程式の周期解, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 実関数論分科会, 信州大学, 2011 年 9 月 29 日

⑥赤木 剛朗, Ulisse Stefanelli, WED 汎関数を用いた発展方程式に対する変分的アプローチ, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 実関数論分科会, 名古屋大学
2010 年 9 月 25 日

⑦赤木 剛朗, 梶木屋 龍治, Fast diffusion 方程式の解の漸近形の安定性解析, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 関数方程式論分科会

名古屋大学, 2010 年 9 月 24 日.

[その他]

○ホームページ等

・個人

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~akagi56/index-j.html>

・研究集会「異常拡散の数理」

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~akagi56/rims12.html>

・国際会議「Functional Analysis and Evolution Equations」

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~akagi56/conf/faa12/>

○主催した関連プロジェクト

・平成 25 年度 JSPS-CNR (日本-イタリア) 二国間共同研究「発展方程式に対する新しい変分法とその応用」

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~akagi56/jspc-cnr/index.html>

○運営委員を務めた関連する国際会議

・CONFERENCE ON Evolution Equations, Related Topics and Applications

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~akagi56/conf/dfg-jspc11/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

赤木 剛朗 (AKAGI GORO)

神戸大学・大学院システム情報学研究科・准教授

研究者番号：60360202

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし