

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月9日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740102

研究課題名（和文） 液滴運動モデルに関する数理解析

研究課題名（英文） Mathematical analysis related to a model of droplet motion

研究代表者

シュワドレンカ カレル (SVADLENKA KAREL)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：60572188

研究成果の概要（和文）：接触角のダイナミックスを伴う平面上の液滴の運動に対し、数学的なモデルを立て、その解析を行った。液滴表面の運動モードによって接触角の挙動が異なることがわかり、2つの基本的なモードに対してモデル方程式の解の性質が一部解明された。さらに、これまで数学的な扱いが難しいとされたジャンクションをもつ複数の界面の運動に対し数値計算に応用可能な近似を導入し、その近似方法が数学解析にも利用できる見込みがあることを示した。

研究成果の概要（英文）：A model was developed for the motion of droplets on surfaces including the dynamics of contact angle, and mathematical analysis of the problem was performed. It was found that the evolution of the contact angle depends on the mode of motion of the droplet surface, and for two basic modes of motion some of the properties of solutions to the corresponding problem were derived. Moreover, a numerical approximation method was introduced for the problem of several interfaces with junctions, which has been considered as difficult to treat mathematically, and it was shown that the suggested method has a perspective to be extended as a tool of mathematical analysis.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：関数方程式論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：界面運動，自由境界問題，平均曲率流，体積保存

1. 研究開始当初の背景

界面が障害物と交差するときに現れる自由境界と接触角について静止している場合に（定常問題）研究がなされており、特に界面が楕円型オペレータに支配されるとき詳しい性質が知られている。この応用例から言うと、液滴が安定な状態で平面上に置かれ

たときの液滴の形状を調べることになる。

一方、実際の応用では液滴が動く場合がほとんどである。しかし、界面が動いているときの自由境界と接触角の解析は結果が少ない。そこで、界面の運動が放物型オペレータと双曲型のオペレータに従うときの接触角の挙動と自由境界の性質を調べることにし

た。

その拡張として複数の界面が接合点（ジャンクション）で交わり、それぞれの界面が最小曲面タイプの作用素に従うときの解析を視野に入れていた。このような解析は表面のコーティングなどのような加工やナノテクノロジーなど様々な分野に広く応用があるとされている。

2. 研究の目的

研究の目的は大きく分けて4つある。

(1) 液滴が（固体の）障害物と接触しながら動く現象のモデリング。現象を数学的に記述するモデル方程式を導出し、付加する条件について精査する。

(2) モデル方程式の数学的解析。(1) で得られた問題は偏微分方程式を含む自由境界問題になるが、その解の存在と一意性、および正則性などの性質を示す。

(3) モデル方程式の数値解法の開発。(1) で立てたモデルが実際の現象をどれほど正確に表しているかを確かめるためにモデル方程式に基づいたシミュレーションを行い、結果を観測データと比較する。問題が複雑なため、数値計算の方法について新しい考察が必要である。

(4) モデルの一般化と精密化。上記のモデルとその解析を複数の界面が存在する場合などより一般的な状況に拡張するより正確な方法について考える。

3. 研究の方法

(1) モデリングでは液滴の表面をスカラー関数のグラフで表し、ハミルトンの原理に基づいて支配方程式を導出した。ここでは、液滴の体積が保存される条件があるので、方程式に非局所的な未定乗数の項が現れる。また、自由境界上に特異性を持つ外力が加わる。

(2) モデル方程式の解析の主なツールは離散勾配流を用いた。この方法は時間を離散化することにより問題を楕円型の最小化問題に持ち込み、先行研究の結果を一部利用できるという特徴がある。また、接触角の特異性を正則化した問題をまず解析してから、正則化パラメータをゼロに持っていく方法をとった。ゼロ極限ではガンマ収束というツールが使われる。

(3) 数値解法では解析で用いられた離散勾配流が非常に有効であることがわかった。正則化された汎関数を有限要素法により離散化し、体積に対する条件のもとで最小化する方法を提案した。

(4) 複数の界面が存在し、最小曲面オペレータに従う問題の解析にはBMOアルゴリズムに基づいたベクトル値関数への拡散による近似方法を開発した。また、数値計算の安定性のため符号付距離関数のベクトル値バー

ジョンを導入し、その解析への応用について考えた。

4. 研究成果

液滴が固体上を動く現象を考え、液滴の形状がスカラー関数で表現される数学的モデルにより定式化した。このモデル方程式は放物・双曲型あり、その特徴として液滴が固体と空気と交わる自由境界上の特異項を含み、体積条件による非局所的な項を含むということが挙げられる。

放物型問題に対して、接触角がゼロであるという正則化問題でも体積保存の効果により自由境界が現れ、その解の存在と正則性を証明した。正則化を行わないシャープな接触角の問題についてガンマ収束というツールを使って解を構成したが、接触角の挙動の詳細な解析を行うには解のサポートが有界であることが不可欠であることがわかった。しかし、非局所的な効果により比較原理など通常の偏微分方程式の道具が利用できないため、サポートの評価が得られず、今後の課題となっている。

双曲型問題は一般に非常に困難とされるが、空間1次元の場合にある種の解の存在が示された。双曲型は放物型と違い、接触角の大きさが運動状態に依存するという興味深いことがわかり、今後はヒステシスの関連について研究する。

上記のスカラー問題に対し条件つき最小化アルゴリズムに基づいた数値計算方法を開発しシミュレーションを行い、モデルが定性的に正しいことが分かった。しかし、3次元コードの作成が技術的に難しく時間を要するため、観測データとの精密な比較がまだなされていない。

次に、ジャンクションを持つ複数の界面の体積保存する曲率流という、上のスカラー問題をより正確にし一般化された問題を研究した。多相問題でジャンクションの接触角と体積保存を考慮した結果はこれまで得られていなかったが、BMOアルゴリズムをベクトル値に拡張することにより近似を行い、その形式的な解析と数値計算を成功させた。数値解析の工夫としてベクトル値距離関数を導入し、このアプローチが多相平均曲率の数学的定義につながることを示唆され、双曲などより一般的な運動への拡張も可能であることがわかった。

上の考察を弾性体リングが障害物に衝突し跳ね返る現象における自由境界の効率的な数値的扱いにも応用した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① M. Kazama, S. Omata, T. Nagasawa, A. Kikuta, K. Svadlenka: *A global model for impact of elastic shells and its numerical implementation*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 23 No. 1, 2013 (in press). (査読有)
- ② E. Ginder, S. Omata, K. Švadlenka: *On a minimizing movement for diffusion-generated interfacial motions*, 数理解析研究所講究録 1791, 189-195, 2012. <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/172824/1/1791-22.pdf> (査読無)
- ③ R. Z. Mohammad, K. Svadlenka: *Diffusion-generated volume-preserving motions: A comparison of MBO-variant algorithms*, Proceedings of Computational Engineering Conference JSCES, Vol. 17, 2012. (査読有)
- ④ E. Ginder, K. Svadlenka: *The discrete Morse flow for volume-constrained membrane motions*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 22, No. 1, pp. 205-223, 2012. (査読有)
- ⑤ E. Ginder, S. Omata, K. Švadlenka: *Numerical computation of volume preserving multiphase mean curvature flow*, Proceedings of Computational Engineering Conference JSCES, Vol. 16, 2011. (査読有)
- ⑥ E. Ginder, S. Omata, K. Švadlenka: *A variational method for diffusion-generated area preserving interface motion*, Theoretical and Applied

Mechanics Japan, Vol. 60, pp. 265-270, 2011.

https://www.jstage.jst.go.jp/article/nctam/60/0/60_265/_pdf (査読有)

- ⑦ S. Omata, M. Kazama, K. Švadlenka: *Numerical computation of coupled problems comprising elastic membrane*, Proceedings of Computational Engineering Conference JSCES, Vol. 15, No. 2, pp. 697-700, 2010. (査読有)

[学会発表] (計16件)

- ① K. Svadlenka: Approximations for constrained motion of multiple interfaces, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, Kyoto, Japan, 2012年11月8日.
- ② K. Svadlenka: Numerical computation of multiple interface motion with constraints, Current Problems in Numerical Analysis, Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic, 2012年10月19日.
- ③ K. Svadlenka: A numerical scheme for constrained motion of multiple interfaces, 4th China-Japan-Korea Conference on Numerical Mathematics, Ōtsu, Japan, 2012年8月25日~28日.
- ④ K. Svadlenka: On a new numerical method for multiphase area-preserving mean curvature motion of interfaces, International Symposium on Computational Science 2012, University Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia, 2012年5月15日~16日.
- ⑤ K. Svadlenka: On a constrained multiphase mean curvature flow, Emerging Topics on

Differential Equations and their Applications, Nankai University, China, 2011年12月5日～9日.

- ⑥ K. Svadlenka: Mean Curvature Flow With Volume Constraint, SIAM Conference on Analysis of PDEs, San Diego Marriott Mission Valley, USA, 2011年11月14日～17日.
- ⑦ K. Svadlenka: 体積を保存する多相平均曲率流の数値計, 算第16回計算工学会講演会, 東京大学柏キャンパス, 2011年5月25日～27日.
- ⑧ K. Svadlenka: Theoretical and computational aspects of global constraints in evolutionary problems, Czech Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010, Czech Technical University in Prague, Prague, Czech Republic, 2010年8月30日～9月4日.
- ⑨ K. Svadlenka: Analysis of the motion of a membrane touching a solid plane, 第35回偏微分方程式論札幌シンポジウム (The 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations), 北海道大学, 2010年8月23日～25日.
- ⑩ K. Svadlenka: On a volume-preserving free boundary problem, RIMS Workshop: Geometric aspects of partial differential equations and conservation laws, 京都大学, 2010年6月9日～11日.
- ⑪ K. Svadlenka: Numerical computation of coupled problems comprising elastic membrane, 第15回計算工学会講演会,

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

シュワドレンカ カレル

(SVADLENKA KAREL)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号: 60572188

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし