様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：３４５０４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２７４０１１２

研究課題名（和文）反応拡散走化性系の解が呈する蜂の巣構造と空間異方の与える影響

研究課題名（英文）Global Existence and Pattern Formation of Solutions to a Reaction-Diffusion-Chemotaxis System

研究代表者
大崎　浩一（Osaki, Koichi）

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：４０３５３３２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,200,000円、（間接経費）　960,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，生物の走化性と増殖・死滅の作用を有する走化性・増殖系を扱い，その解の大域存在ならびにパターン形成について研究しました．解の大域存在については，空間次元が2および3の場合において，分泌項の劣線形オーダーを新たに導入することで，これを示しました．さらには，解の一様評価式を導出することで，指数アトラクターの存在についても示しています．空間2,3次元における解のパターン形成についても調べました．具体的には，分岐理論を用いて局所分岐解の存在を示し，また中心多様体理論を用いてその解の安定性を調べています．走化性係数を無限大としたときの解の漸近挙動についても調べました．

研究成果の概要（英文）：We examined a chemotaxis system with a logistic growth, and global existence and the pattern formation of solutions. For the two- and three-dimensional cases, the global existence of solutions and the existence of exponential attractors were demonstrated by introducing a sublinear secretion term. The two- and three-dimensional pattern formation of the solutions also were investigated by the local bifurcation and the center manifold theory. We studied asymptotic behavior of the stationary solutions to the chemotaxis system, as the chemotactic coefficient tended to infinity.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：走化性　反応拡散系　パターン形成　非線形現象　Keller-Segel系

１．研究開始当初の背景

反応拡散走化性系, 特に生物の走化性と増殖・死滅の作用を有する走化性・増殖系について, その学術的発展段階を, 人類のそれ, すなわち, 人類誕生後の農耕による定着の第１段階, 産業革命の第２段階, そして現在の地域横断的なグローバル時代の第３段階になぞらえて考えてみますと, 現在は既に第３段階に入っていると思われます. 実際, 順を辿って概観しますと, 細胞性粘菌は走化性を有しますが, この生物に対して Keller と Segel が菌と菌自らが分泌する化学物質を２因子とした走化性系(Keller-Segel 系)を提案しました(Keller-Segel, J. Theor. Biol. 26 (1970)). これが方程式誕生です. 発展の第１段階は, 解析的枠組による問題定着であり, それらには, 時間大域解の存在 (Nagai et.al., Funkcial. Ekvac. 40(1997); Yagi, Math. Japon. 45(1997); <u>Osaki</u>-Yagi, Funkcial. Ekvac. 44(2001)) ならびに, 爆発問題(Childress-Percus, Math. Biosci. 56(1981); Jager-Luckhaus, Trans. AMS 329(1992))などを挙げることができます. エポックメーキングな第２段階としては, 走化性大腸菌の時空間パターンの形成を発見して雑誌 Nature の表紙を飾った Budrene と Berg の一連の研究 (Budrene-Berg, Nature 349(1991)など) ならびに, その数理モデルとして２因子走化性・増殖系を解析された三村教授・辻川教授の研究 (Mimura-Tsujikawa, PhysicaA 230 (1996)) が考えられるように思われます. 実際それ以降, 走化性・増殖系に対して多くの成果が得られています. 研究代表者の関係したものを中心に挙げてみても, 空間２次元の場合で, 時間大域解と指数アトラクターの存在 (<u>Osaki</u> , Tsujikawa, Yagi and Mimura, Nonlinear Anal. TMA 51(2002); <u>Osaki</u>-Yagi, Adv. Math. Sci. Appl. 12(2002); Aida, <u>Osaki</u> ,Tsujikawa, Yagi and Mimura, Nonlinear Anal. RWA 6(2005)) , パターン形成 (Aida, Tsujikawa, Efendiev, Yagi and Mimura, J. London Math. Soc. 74(2006); Okuda-<u>Osaki</u>, 2009, 投稿中), 指数アトラクター次元の上下方評価(Efendiev, Nakaguchi and <u>Osaki</u>, Grasgow J. Math. 50(2008))といった成果があり, また, 空間３次元の時間大域存在(Winkler, 2009, プレプリント)やレビュー論文(Hillen-Painter, J. Math. Biol. 58(2009))といった物理学や生物学も含めた分野横断的な研究の広がりを見せています.

２．研究の目的

本研究では，生物の走化性と増殖を含む反応拡散走化性系の研究発展の第３段階を掘り下げ，また展開する目的で研究を行います．特に，以下の項目に的を絞り研究を進めます．

(1)走化性・増殖系における弱減衰の場合についての時間大域存在性. 増殖項が存在しない Keller-Segel 系は空間次元 N が２以上のとき, 解がデルタ関数となり爆発すること(走化性崩壊, Chemotactic Collapse)が知られています. 一方, 本研究で取り扱う走化性・増殖系は, ロジスティック型の増殖項を有し, これが未知関数２次の減衰として働くことで爆発が抑えられ, 解の時間大域的存在ならびに指数アトラクターが存在することが知られています(<u>Osaki</u> , Tsujikawa, Yagi and Mimura, Nonlinear Anal. TMA 51(2002)). つまり, ０次減衰と２次減衰との間に爆発と大域存在の分水嶺が存在することが予想できます. 本研究では, 時間大域存在を示すという文脈の中で, ２次減衰を何次まで緩めることができるのかという問題について考えます.

(2)走化性・増殖系の解のパターン形成と分岐解析. 大阪大学・八木厚志教授らの研究グループは, 三村教授・辻川教授との共同で, 空間２次元の走化性・増殖系に正六角形パターンなどの解のパターン形成が起こることを数値的に示しています(Aida, Tsujikawa, Efendiev, Yagi and Mimura, J. London Math. Soc. 74(2006)). 本研究ではこれを分岐解析の視点から取り扱い, 実際に空間一様解からの分岐としてとらえられることを示します. また, パターン解の安定性についても研究します. さらに, 空間３次元走化性・増殖系についてもパターン形成の問題を考えます.

(3)ミツバチの造巣過程と巣のパターン形成. 走化性の作用を有する反応拡散走化性系には, 社会性昆虫であるシロアリの蟻塚形成の方程式(Deneubourg 系)が存在します. これは, 本研究で取り扱う走化性・増殖系と定常問題が数理的に同じ構造をしています. すなわちこれは, Deneubourg 系にも, 空間２次元の場合, 正六角形パターン解が存在するということを示唆します. この文脈において, 研究代表者は, 同じ社会性昆虫であるミツバチの巣に興味を覚えました. そこで, ミツバチの造巣過程に対する数理モデルを構成することを目標に, その造巣過程に関する実験と観察を行います.

(4)反応拡散系における界面運動に対する曲率方程式の解析. パターン形成とらえる別視点の研究も進めます. 非線形反応項から誘導される解の振る舞いによってパターン形成が発生しますが, 特にその界面運動に対する, キネマティック方程式という微分幾何学に基づく方程式を考えます. 本研究では, この方程式の性質と解のパターン形成について調べます.

(5)空間２次元走化性・増殖系に発生するパターンに空間異方性が与える影響. 蜂の巣, **特にミツバチの巣**の３次元構造を考えます. **面白いことにこれは，蜜が垂れないようにか正六角形の面が地面に垂直になるような構造をしています．研究代表者は，この現象がミツバチが正六角形の面とその垂直方向との間に何らかの**空間異方性**を感じ取ることで起こっているのではないかとの仮説を立てました．そこで，ミツバチの造巣過程を理解する糸口となる可能性もある走化性・増殖系に対して空間異方の作用を導入して，それがパターンに与える影響を調べます．**

３．研究の方法

(1)走化性･増殖系における弱減衰の場合についての大域存在と指数アトラクターの構成．研究代表者等が 2002 年に行ったエネルギー法と同様の方法でこれを考えると，2 次減衰が限界となることが，予備的な計算によって分かっています．そこで，菌の化学物質の分泌のオーダーについて劣線形のオーダーを導入することで，これを考えていきます．

(2)走化性･増殖系の解のパターン形成と分岐解析．本研究では，空間一様解からの分岐としてパターン解をとらえます．具体的には，関数空間をパターンと同じ節目をもつフーリエ級数からなる部分空間に制限し，その空間上で作用する線形化作用素の余次元が 1 の問題を理論的に研究します．パターン解の安定性については，中心多様体の理論を用いて，縮約方程式を導出し，それを解析することで示します．空間 3 次元のパターン形成についても同様に行います．

(3)ミツバチの造巣過程と巣のパターン形成．これには女王フェロモンに対する走化性が重要であることが予想されます．そこで，女王を有するミツバチの群が巣箱でどのように群集を形成し，そしてまた造巣をするのかについて観察します．

(4)反応拡散系における界面運動に対する曲率方程式の解析．これまで，Davydov, Zykov, Mikhailov 等が提案したキネマティック方程式は，曲線の長さが変化しないことが数値計算によって示唆されていました．このことが方程式のどのような構造に由来するのかについて，特に曲線の接線速度に着目することで，調べます．

(5)空間２次元走化性･増殖系に発生するパターンに空間異方性が与える影響．**ミツバチの造巣過程を理解する糸口となる可能性もある走化性・増殖系に対して，空間異方の作用を導入して，それがパターンに与える影響を考えます．この系にはこれまで，研究代表者等の研究によって正六角形パターンが発現することが示されていますが，空間異方の作用を**係数に課し，その作用によって系がどのようなパターンを呈するのかについて調べます．

4．研究成果

次の 5 項目について，以下の成果を得ました．

(1)N(=2,3)次元走化性･増殖系における弱減衰の場合についての大域存在と指数アトラクターの構成（東京医科歯科大学･中口悦史先生との共同研究）．菌の化学物質の分泌のオーダーについて，これまでが線形であったところを劣線形として考えることで，空間２次元の場合の解の時間大域存在(E. Nakaguchi and K. Osaki, Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods 74, 286-297 (2011), 査読有)，ならびに空間 2,3 次元における解の時間大域存在と指数アトラクターの存在(E. Nakaguchi and K. Osaki, DCDS-B 18(10), 2627-2646 (2013), 査読有)を示すことができました．

(2)N(=2,3)次元走化性･増殖系の解のパターン形成と分岐解析（電気通信大学･久藤衡介先生，千葉大学･櫻井建成先生，宮崎大学･辻川亨教授ならびに，明治大学･奥田孝志先生，九州産業大学･鳴海孝之先生との共同研究）．大阪大学･八木厚志教授らの研究グループは，三村教授･辻川教授との共同で，空間 2 次元の走化性･増殖系に正六角形パターンなどの解のパターン形成が起こることを数値的に示していました (Aida, Tsujikawa, Efendiev, Yagi and Mimura, J. London Math. Soc. 74(2006))．本研究ではこれを分岐解析の視点から取り扱い，実際に空間一様解からの分岐としてとらえられることを示しました（K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai and T. Tsujikawa, Physica D241, 1629-1639 (2012), 査読有）．また，この論文では走化性係数を無限大としたときの定常解の挙動についても研究しています．さらに別の論文では，パターン解の安定性についても議論しました(T. Okuda and K. Osaki, Nonlinear Anal. Real World Appl. 12, 3294-3305(2011), 査読有)．空間 3 次元走化性･増殖系についても，空間 2 次元と同様の空間充填パターン解が理論的･数値的に得られることが分かりました(T. Narumi-K. Osaki, RIMS 講究録へ投稿中)．その安定性については，今後の課題です．

(3)ミツバチの造巣過程と巣のパターン形成（大崎研･博士課程の上道賢太君，人と自然の博物館，兵庫県立大学･大谷剛名誉教授，九州産業大学･鳴海孝之先生との共同研究）．ミツバチの造巣過程には女王フェロモンに対する走化性が関わっていることが容易に想像できますが，本研究での実験観察により，造巣時のミツバチ自身の発熱が熱勾配を形成することが明らかとなり，今後ミツバチの走熱性なども調べるべき要因であることが示唆されました．そう考えるに至った一連の実験観察について，計 3 本の論文にまとめました(K. Osaki, K. Kitao and T. Ohtani, Comb Construction of European Honeybees -Observations in a Clear Acrylic Plastic Hive, Hyogo Biology 14⑵, 107-112, (2011), 査読有; K. Uemichi, K. Osaki and T. Ohtani, Hyogo Biology 14(3), 185 -189, (31 March, 2012), 査読有; K. Uemichi, K. Osaki and T. Ohtani, Hyogo Biology 14(4), 265-269, (2013), 査読有.

(4)反応拡散系における界面運動に対する曲率方程式の解析(明治大学･矢崎成俊先生との共同研究)．非線形反応項から誘導される解の振る舞いによってパターン形成，特にその界面の運動に注目した，キネマティック方程式に対して研究を行いました．特に，Davydov, Zykov, Mikhailov 等が提案したキネマティック方程式は，局所長ならびに全体長が保存する性質を有することを理論的に示しました．さらに，局所長ならびに全体長が時間変化する場合における境界条件の役割について示し，またその際の接線速度の例を示しました．これらの成果は国際会議にてポスター発表を行い，現在その査読付きプロシーディングスに１本の論文を投稿中です．

(5)空間２次元走化性･増殖系に発生するパター

ンに空間異方が与える影響. 蜂の巣の３次元構造を考えたときの断面図に対応するパターンを目標に, 2 次元空間で解析と数値計算を行いましたが, それが第 1 分岐となるパラメータ領域を見つけることが困難でした. さらには, ミツバチが造巣するとき, 重力方向に巣を伸ばすという事実を受け, それと同様の空間異方性を方程式にも課すというのがそもそもの動機でしたが, 本研究の成果(4)で, ミツバチは重力方向でなくとも巣を伸ばしていくことが実際に観察されましたので, 空間異方の導入の仕方そのものについても, 再考察する必要がでてきました. そこで本研究では, 造巣過程をよく観察することに注力し, 系に空間異方が与える影響を詳細に調べることは, 今後の課題としました.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① E. Nakaguchi and K. Osaki, Global Solutions and Exponential Attractors of a Parabolic-Parabolic System for Chemotaxis with SubQuadratic Degradation, DCDS-B 18(10), 2627-2646 (1st December, 2013), **査読有**
DOI:10.3934/dcdsb.2013.18.2627

②K. Uemichi, K. Osaki and T. Ohtani, High Temperature Areas in the First Stage of the Comb Construction of European Honeybees, Hyogo Biology 14(4), 265-269, (31 March, 2013), **査読有**

③K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai and T. Tsujikawa, Spatial Pattern Formation in a Chemotaxis-Diffusion-Growth Model, Physica D 241, 1629-1639, (1st. October, 2012), **査読有**
URL:http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2012.06.009

④K. Uemichi, K. Osaki and T. Ohtani, Behavior and Comb Patterns of European Honeybees at the First Stage of Comb Construction, Hyogo Biology 14(3), 185-189, (31 March, 2012), **査読有**

⑤T. Okuda and K. Osaki, Bifurcation of Hexagonal Patterns in a Chemotaxis-Diffusion-Growth System, Nonlinear Anal. Real World Appl. 12, 3294-3305, (December, 2011), **査読有**
DOI:10.1016/j-nonrwa.2011.05.026

⑥ E. Nakaguchi and K. Osaki, Global Existence of Solutions to a Parabolic-Parabolic System for Chemotaxis with Weak Degradation, Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods 74, 286-297, (1 January, 2011), **査読有**
DOI:10.1016/j.na.2010.08.044

⑦H. Kido, K. Fujita, K. Osaki T. Sakurai and A. Inoue, Spiral Pattern Formation on Bulk Metallic Glass by Electropolishing, Chem. Lett. 40, 191-193, (22 January, 2011), **査読有**
http://dx.doi.org/10.1246/cl.2011.191

⑧K. Osaki, K. Kitao and T. Ohtani, Comb Construction of European Honeybees – Observations in a Clear Acrylic Plastic Hive, Hyogo Biology 14（2）, 107-112, (31 March, 2011), **査読有**

⑨T. Okuda and K. Osaki, Application of Normal Form Theory to a Chemotaxis System in One Dimension, **京都大学数理解析研究所講究録** 1742 (May, 2011), 49-61, **査読無**

〔学会発表〕（計 16 件）

① T. Narumi and K. Osaki, Three-Dimensional Pattern Formations in a Biological Model of Chemotaxis and Growth（**走化性と増殖の生物モデルでみられる** 3 **次元パターン**）, **第** 10 **回 生物数学の理論とその応用，京都大学数理解析研究所，** 2013 **年** 11 **月** 20 **日.**

②**大崎浩一，** Destabilization and Pattern Formation of Solutions to Reaction-Diffusion Systems，**大阪大学大学院 情報数理学セミナー，大阪大学大学院情報数理学研究科，** 2013 **年** 10 **月** 10 **日.（招待講演）**

③**平坂優衣・大谷剛・大崎浩一・上道賢太，セイヨウミツバチの造巣行動の研究**(1)**「三角つまみパターン」と「かんながけ行動」，日本昆虫学会第** 73 **回大会，北海道大学，** 2013 **年** 9 **月** 14 **日.**

④ K. Osaki, H. Satoh and S. Yazaki, Kinematic Equation for Open Curves with Tangential Velocities, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013, Meiji Univ., Sep. 5-8, 2013. (poster)

⑤K. Uemichi, T. Narumi and K. Osaki, A Mathematical Model for Honeybee Comb Construction, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013, Meiji Univ., Sep. 5-8, 2013. (poster)

⑥ T. Narumi and K. Osaki, Three-Dimensional Pattern Formation in a Chemotaxis System with Logistic Source, Czech-Japanese Seminar in Applied

Mathematics 2013, Meiji Univ., Sep. 5-8, 2013. (poster)

⑦大崎浩一，走化性・増殖系に現れる非線形現象とその解析―これまでとこれから―，南大阪応用数学セミナー，大阪府立大学，2013 年 7 月 20 日．(招待講演)

⑧上道賢太・大崎浩一・大谷剛，非線形拡散の自己集合とそれがアシストする走熱性の自己組織化，第 8 回関西学院大学数理科学研究センター談話会，関西学院大学理工学部，2013 年 4 月 24 日．

⑨上道賢太・大崎浩一，ミツバチの造巣過程に対する数理モデル構成に向けて，日本数学会 応用数学分科会，京都大学，2013 年 3 月 22 日．

⑩上道賢太・大崎浩一・大谷剛，ミツバチの造巣過程に対する数理モデル構成に向けて，兵庫県生物学会 2012，神戸大学発達科学部，2012 年 11 月 25 日．

⑪ K. Uemichi and K. Osaki, Does self-assembly of honeybees assist the self-organization of constructing their honeycombs?, International Conference on Modeling, Analysis and Simulation (ICMAS) 2012, 明治大学 駿河台キャンパス紫紺館，2012 年 11 月 8 日．(poster)

⑫E. Nakaguchi, K. Osaki and M. Winkler, Global Existence of Solutions to a Parabolic-Parabolic System for Chemotaxis with Logistic Source in the Higher-Dimensional Domain, 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Florida, USA, 4 July, 2012.

⑬大崎浩一，走化性方程式に対するこれまでの成果と今後の課題，研究集会「放物型発展方程式とその応用」，大阪大学大学院情報科学研究科，2011 年 9 月 23 日．

⑭中口悦史・大崎浩一，弱い減衰項を持つ走化性方程式の大域解の存在，日本数学会 函数方程式論分科会，早稲田大学，2011 年 3 月 22 日．(要旨集にて発表)

⑮奥田孝志・大崎浩一，走化性方程式に現れる時空パターンについて，日本数学会 応用数学分科会，名古屋大学，2010 年 9 月 24 日．

⑯奥田孝志・大崎浩一，走化性方程式に現れる振動解について，第 59 回理論応用力学講演会，日本学術会議（東京都），2010 年 6 月 8 日．

6．研究組織

(1)研究代表者

大崎　浩一（OSAKI　KOICHI）

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40353320