

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740262

研究課題名（和文） Lyapunov 指数の一般化と非平衡非定常現象への応用

研究課題名（英文） Generalization of Lyapunov exponent and its application to non-equilibrium non-stationary phenomena

## 研究代表者

秋元 琢磨 (AKIMOTO TAKUMA)

慶應義塾大学・理工学研究科・特任講師

研究者番号：30454044

研究成果の概要（和文）：よく知られているように、花粉の微粒子は、水面上を不規則に動き、拡散する。通常の拡散では、平均2乗変位が時間に対して線形に増大し、その比例係数（拡散係数）で拡散が特徴づけられる。本研究では、非平衡非定常現象の中でも特に異常拡散（平均2乗変位が線形に増大しない拡散）の数理的な側面に注目し、異常拡散を示す粒子の動きを1次元の写像力学系によりモデル化し、拡散を特徴付ける長時間平均量に関する分布極限定理（無限測度エルゴード理論）を示した。これらの結果により、一分子測定による実験で見られるような拡散係数の大きな揺らぎは無限測度エルゴード理論と関係する事が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：As is well known, a particle found in pollen grains moves irregularly on the surface of water. For such diffusion, the mean square displacement of a particle increases linearly in time and the diffusivity is characterized by its slope, i.e., diffusion constant. In this study, a mathematical aspect of anomalous diffusion, where the mean square displacement does not increase linearly in time, is investigated by modeling a motion of anomalous diffusion as a one-dimensional dynamical system. Here, we have shown distributional limit theorems for time-averaged observables. These results suggest that infinite ergodic theory plays an important role in large fluctuations of time-averaged diffusion constants observed in single-particle tracking experiments.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数理物理・物性基礎

科研費の分科・細目：数理物理・物性基礎（理論）

キーワード：数理物理 統計力学

## 1. 研究開始当初の背景

統計力学は、微視的な力学から巨視的な振る舞いを結びつける架橋である。特に、微視的な力学にカオス性があれば、力学的記述を

確率的な記述へ変える事により、平衡状態での巨視的な振る舞いを特徴付ける事ができる。巨視的な観測量は微視的な観測関数の長時間平均の結果である事から、「長時間平均」＝「空間平均（一定）」ならば（このような

性質はエルゴード性と呼ばれている)、巨視的な観測量は一定値となるため、その系は平衡状態になるとみなすことができる。一方、ナノクリスタルの発光現象や細胞内輸送現象のような非平衡非定常現象では、長時間平均量が一定値には収束せず、ランダムに変化する。

これまでの研究では、非平衡現象を長時間平均を基にして理解されていない。しかし、近年の無限測度エルゴード理論の発展により、長時間平均のランダム性は本質的なものとなってきている。したがって、非平衡現象のエルゴード性の探求が注目されてきている。これは、非平衡非定常状態の統計力学の構築に向けた第一歩になると考えている。

## 2. 研究の目的

本研究では、数値実験と理論解析を通して、力学的不安定性を統一的に特徴付ける一般化リアプノフ指数を提案し、非平衡非定常現象（特に、平均2乗変位が線形に増大しない異常拡散）へ応用する事が目的である。

### (1) リアプノフ指数の一般化

非平衡非定常現象と密接に関係する非定常カオス力学系では、初期値の誤差が指数関数的ではなくそれより遅く（劣指数関数的に）増大していくため、力学的不安定性を特徴付ける通常のリアプノフ指数がゼロとなる。しかし、非定常カオスは、初期値鋭敏性といった、所謂、“カオス”の性質を持っている。したがって、この弱いカオス性を定量化する必要がある。近年、このような弱いカオスの特徴付けが進展してきているが、その理論的な側面はまだ不十分である。ここでは、無限測度エルゴード理論を基礎として、様々なクラスの観測関数の長時間平均の振る舞いを明らかにする。そして、新たに提案した一般化リアプノフ指数の物理的な意味や収束性、一意性を解析的に明らかにし、その理論的枠組みを完成させる。

### (2) 非平衡非定常現象への応用

近年、平均2乗変位 (MSD) が線形ではなくベキ的に増大するという異常拡散において、長時間平均で定義された MSD に対する拡散係数が大きく揺らぎ、ランダムに分布するという事が実験で発見された。このランダム性を理解するため、異常拡散を示す確率モデルの一つである連続時間ランダムウォーク (CTRW) を用いて、長時間平均 MSD の拡散係数が本質的にランダムである事が示さ、拡散係数の大きな揺らぎの原因の一つと考えられている。本研究では、CTRW のランダムウォーカーの動きを1次元の写像力学系でモデル化し、その力学系の力学的不安定性

と輸送係数との関係を明らかにする事が目的である。

## 3. 研究の方法

### (1) リアプノフ指数の一般化

中立不動点（不安定でも安定でもない不動点）を持つ1次元写像では、強く接している場合、軌道の振る舞いを特徴付ける不変測度（軌道がどこに滞在するかの頻度）が規格化できなくなる。このような測度は無限測度と呼ばれている。本研究では、無限測度を持つ1次元写像力学系を用いて、時間平均で定義されているリアプノフ指数を一般化し、適切な時間スケールで基準かしたリアプノフ指数のアンサンブル平均（初期点による平均）を提案する（一般化リアプノフ指数）。

解析計算に関しては、更新理論を用いる。更新理論は、更新間の時間が独立同一分布に従うような点過程であり、中立不動点を持つ1次元写像を粗視化する事により近似的に得られる。

### (2) 非平衡非定常現象への応用

1次元写像を周期的に並べた力学系の軌道は、そのカオス性よりランダムにセル間を移動し、拡散する事が知られている（決定論的拡散）。このような決定論的拡散の中でも、セル内の力学系が無限測度で特徴付けられる場合、異常拡散（平均2乗変位がベキ的に増大する）を示す。異常拡散には、ベキ指数が1より大きい“速い拡散”と1より小さい“遅い拡散”がある。本研究では、遅い決定論的拡散において、長時間平均 MSD の振る舞いを理論的に示し、拡散係数の本質的な揺らぎを無限測度エルゴード理論の観点から明らかにする。また、速い拡散に関しては、バイアスを加えた拡散を考え、長時間平均で定義されたドリフトの速さに関する分布極限定理を示す。

## 4. 研究成果

### (1) リアプノフ指数の一般化[1]

カオス力学系では、不変測度が規格化できない（無限測度）のとき、カオスの老化が起きる。カオスの複雑な振る舞いのおかげで、決定論的な力学系によって生成された軌道は確率過程として表現できる。特に、不変測度は、軌道の滞在分布を明らかにし、得られた確率過程を特徴付ける。[1]では、規準化された長時間平均で定義されたリアプノフ指数のアンサンブル平均で定義された一般化リアプノフ指数のシステムが始まってからの時間の依存性を解析的に示し、システムが経過すればするほど、力学的不安定性は低下する事を明らかにした（カオスの老化）。

さらに、システムの経過時間が観測時間よりも大きくなると、弱いカオス的な運動だけでなく規則的な運動が生成される。これがカオスの老化の原因の一つである。この新しいカオス現象は、無限測度エルゴード理論における分布極限定理の一つの一般化となっている。したがって、物理学だけでなく数学分野に大きなインパクトを与えている。

### (3) 非平衡非定常現象への応用

#### ①遅い決定論的拡散[4, 7]

無限測度エルゴード理論を用いて、決定論的拡散における長時間平均で定義された拡散係数の統計的な性質を明らかにした[7]。アンサンブル平均 MSD は、遅い拡散を示すにもかかわらず、長時間平均 MSD は、時間に対して線形に増大する（通常拡散）。その拡散係数は、セルの力学系の不変測度によって特徴付けられる事を発見した。さらに、長時間平均 MSD の拡散係数の分布は、無限測度エルゴード理論における可積分観測関数の長時間平均の分布極限定理に現れるミッタグ-レフラー分布に従う事を示した。

決定論的遅い拡散に非対称性（バイアス）を入れたときの、長時間平均で定義される拡散係数とドリフトの大きさの関係（アインシュタインの関係）を明らかにした[4]。バイアスがあるときとないときの一般化リアプノフ指数の差は、バイアスのあるときのドリフトの速さと関係している。ホップのエルゴード定理より、長時間平均を基にしたアインシュタインの関係は、輸送係数を規準とする長時間平均量（例えば、リアプノフ指数）で割る事により得られる。

#### ②速い決定論的拡散[3]

レヴィウォークと呼ばれる速い拡散過程では、外場への応答が分布として現れる。無限測度エルゴード理論では、様々な観測関数の時間平均は分布として収束する事が知られている。その分布関数は、観測関数のクラスに依存する。例えば、観測関数が不変測度に関する積分が有限であれば、ミッタグ-レフラー分布、非可積分であれば、一般化逆正弦分布に従う。これまで、速い拡散における外場への応答がどのようなになるかは、未解決な問題であった。この研究では、外場のあるレヴィウォークと関係する決定論的拡散において、分布への応答が分布に現れる事を示した。一定の外場が加えられているにもかかわらず、長時間平均で定義されたドリフトは、ランダムに収束する。しかしながら、外場への応答は、その分布関数に明確に現れる（分布としての応答）。この結果、実験の時系列解析において、一見再現性のないものも分布を見る事により、背後に潜んでいる法則を取

り出す事ができる事を示唆している。

#### ③確率モデルにおける分布極限定理[2, 5, 6]

トラップ時間が各格子に割り当てられた CTRW（トラップモデル）において、長時間平均 MSD で本質的にランダムになる事を解析的に示した[6]。その分布は、2次元以上では CTRW と同じミッタグ-レフラー分布になるが、1次元では、異なった分布になる事を発見した。この分布極限定理は、DNA 上のたんぱく質の1次元拡散で見られる拡散係数の揺らぎとの関係を示唆している。

細胞内には、様々なバインディングサイトがあり、そのランダム性により、トラップ時間分布がベキ分布になる場合がある。しかしながら、バインディングサイトの数は有限であり、ベキ分布には必ずカットオフが存在する。したがって、カットオフを持つトラップ時間分布の CTRW における拡散係数の振る舞いを明らかにする事は重要である。[2, 5]では、観測時間がカットオフ時間より短い領域では、カットオフのない CTRW と同じような再現性の振る舞い（分布的振る舞い）を行い、観測時間がカットオフ時間より大きくなると、通常の拡散過程になる事を発見した。

### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

1. T. Akimoto and E. Barkai, Aging generates regular motions in weakly chaotic systems, Phys. Rev. E 87, 032915 (2013). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032915
2. T. Miyaguchi and T. Akimoto, Ergodic properties of continuous-time random walks: Finite-size effects and ensemble dependencies, Phys. Rev. E 87, 032130 (2013). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.032130
3. T. Akimoto, Distributional response to biases in deterministic superdiffusion, Phys. Rev. Lett. 108, 164101 (2012). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.164101
4. T. Akimoto, Generalization of the Einstein relation for single trajectories in deterministic subdiffusion, Phys. Rev. E 85, 021110 (2012). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.021110
5. T. Miyaguchi and T. Akimoto, Ultraslow Convergence to Ergodicity in Transient Subdiffusion, Phys. Rev.

- E 83, 062101 (2011). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.062101
6. T. Miyaguchi and T. Akimoto, Intrinsic Randomness of Transport Coefficient in Subdiffusion with Static Disorder, Phys. Rev. E 83, 031926 (2011). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.031926
  7. T. Akimoto and T. Miyaguchi, Role of infinite invariant measure in deterministic subdiffusion, Phys. Rev. E 82, 030102(R) (2010). 査読有. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.030102

[学会発表] (計 12 件)

1. 秋元琢磨, Eli Barkai, 弱いカオス系において、エイジングは規則的な運動を生成する, 日本物理学会, 第 68 回年次大会 (広島大学), 2013 年 3 月 27 日
2. 秋元琢磨, 速い拡散 (レヴィウォーク) に外場を加えると分布として応答する, 日本物理学会, 2012 年秋季大会 (横浜国立大学), 2012 年 9 月 19 日
3. 秋元琢磨, 細胞内輸送現象におけるベキ法則と応答理論, 日本物理学会, 第 67 回年次大会 (関西学院大学), 2012 年 3 月 27 日
4. 宮口智成, 秋元琢磨, 連続時間ランダムウォークにおけるエルゴード性の遅い回復, 日本物理学会, 第 67 回年次大会 (関西学院大学), 2012 年 3 月 25 日
5. 秋元琢磨, 遅い拡散における単一軌道を基にしたアインシュタインの関係の拡張, 日本物理学会, 第 67 回年次大会 (関西学院大学), 2012 年 3 月 24 日
6. T. Akimoto, Applications of infinite ergodic theory in anomalous diffusion, ESF-JSPS Frontier Science Conference Series for Young Researchers, Mathematics for innovation: Large and complex systems, Tokyo (Japan), Feb. 28 - March 4, 2012.
7. T. Akimoto, Relationship between dynamical instability and transport coefficient in anomalous subdiffusion, Weak Chaos, Infinite Ergodic Theory, Anomalous Transport, Max-Planck Institute (Germany), July 25 - Aug. 13, 2011.
8. 秋元琢磨, 宮口智成, 遅い決定論的拡散における輸送係数の揺らぎの理論, 日本物理学会, 第 66 回年次大会 (新潟大学), 2011 年 3 月 27 日
9. 宮口智成, 秋元琢磨, 一時的劣拡散と切断レヴィフライト: エルゴード性のゆっくりにした回復, 日本物理学会, 第 66 回年次大会 (新潟大学), 2011 年 3 月 28 日
10. T. Akimoto, and T. Miyaguchi, Intrinsic randomness of transport coefficient in anomalous diffusion, The 13th Slovenia-Japan seminar on nonlinear science and Waseda AICS symposium on nonlinear and nonequilibrium phenomena in complex systems, Waseda (Japan), Nov. 4-6, 2010.
11. T. Akimoto, and T. Miyaguchi, Statistical properties of the transport coefficient for deterministic anomalous diffusion, Anomalous Transport: from Billiards to Nanosystems, Sperlonga (Italy), Sept. 20-24, 2010.
12. T. Akimoto, and T. Miyaguchi, Mittag-Leffler law for diffusion coefficient in deterministic subdiffusion, Dynamics Days Asia Pacific 6, Sydney (Australia), July 12-14, 2010.

[その他]

ホームページ等

<http://akimototakuma.wordpress.com/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

秋元 琢磨 (AKIMOTO TAKUMA)

慶應義塾大学・理工学研究科・特任講師

研究者番号: 30454044

### (2) 研究分担者 なし

### (3) 研究連携者 なし