様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月　１７日現在

機関番号：12601
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2010　～　2011
課題番号：22800005
研究課題名（和文）　グラフマイナー理論に基づくアルゴリズムの研究

研究課題名（英文）　Research on algorithms based on graph minor theory

研究代表者
小林　佑輔（KOBAYASHI YUSUKE）
東京大学・大学院情報理工学系研究科・助教
研究者番号：40581591

研究成果の概要（和文）：

グラフマイナー理論に基づく既存のアルゴリズムは，計算時間が入力サイズの多項式のオーダーではあるが，理論的にも実用的にも到底効率的なアルゴリズムとは言えないものである．本研究で我々は頂点対が定数の点素パス問題に対するアルゴリズムの計算時間を O(n^3)から O(n^2)へ改良した．ただし，n はグラフの頂点数である．また，グラフクラスを制限した場合に対してより単純で高速なアルゴリズムを与えた．

研究成果の概要（英文）：
Although algorithms based on the graph minor theory run in polynomial time, they are theoretically and practically far from efficient algorithms. In this research, we gave a faster algorithm for the disjoint paths problem with a fixed number of terminal pairs, which improves the running time from O(n^3) to O(n^2),where n is the number of the input graph. Furthermore, we gave a simpler and faster algorithm for some problems if the input graph is in restricted classes.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010　年度	1,250,000	375,000	1,625,000
2011　年度	1,150,000	345,000	1,495,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,400,000	720,000	3,120,000、

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：グラフ，アルゴリズム

１．研究開始当初の背景

グラフマイナー理論はグラフ理論における最も重要な理論体系の一つであり，1980 年代からの Robertson and Seymour による 20 編以上の論文にわたる一連の研究によって確立された．また，この理論の中でいくつかのグラフの問題に対する多項式時間アルゴリズムが構成されている．特に，グラフアルゴリズムの分野における基本的かつ重要な

問題である点素（辺素）パス問題がグラフマイナー理論を用いて解決されたことは，アルゴリズムの研究者にとって衝撃的なことであった．

点素パス問題の解決に使われたことで，グラフマイナー理論がアルゴリズムの研究においても有用であることは多くの研究者に認識されている．しかし，グラフマイナー理論に基づき得られたアルゴリズムは，理論的には高速でも実用からはほど遠いものである．

２．研究の目的

本研究では，情報科学の視点からグラフマイナー理論を用いたアルゴリズムを構成し，理論と実用とのギャップを縮めることを目的とする．具体的には以下の２点の研究を行う．

課題(A)　<u>新たな問題に対する，グラフマイナー理論を用いたアプローチ</u>

この課題では，グラフマイナー理論に基づくアルゴリズムの適用範囲を広げることを目指している．グラフアルゴリズムの分野では，多項式時間アルゴリズムの知られていない興味深い問題が数多く残っており，これらの問題の中には，古典的なグラフ理論や組合せ最適化の手法のみでは，解決するのが困難なものも多いと思われる．そこで，点素パス問題の解決に使われたグラフマイナー理論に基づく手法を，他の未解決問題に適用する．

今まで未解決だったグラフ上の問題に対して多項式時間アルゴリズムを与えることは，それ自体が大きな成果である．さらに，多くの問題が解決されればグラフマイナー理論の有用性を示す結果であり，グラフマイナー理論がグラフアルゴリズムにおいて主要な手法の一つになると考えられる．

課題(B)　<u>既存のアルゴリズムの高速化･簡略化</u>

1980 年代から提唱されたグラフマイナー理論は，グラフ理論研究者の間で目覚ましい発展を遂げ，1990 年代からはアルゴリズムへ適用されてきた．しかし，既存のグラフマイナー理論に基づくアルゴリズムはどれも理論的に“効率的”なものばかりであり，とても実用的に効率的とは言えないものである．そのため，既存のグラフマイナー理論に基づいたアルゴリズムと，実用的なアルゴリズムとの間には現状では大きなギャップがあると言える．

そこで，本課題では既存のアルゴリズムを改良して，理論・実用両面でのアルゴリズムの効率性の向上，およびアルゴリズムの簡略化を図り，実用的アルゴリズムとのギャップを小さくすることを目的とする．特に，理論的な計算時間の改善という形に表れない効率性の改良は，ほとんど既存研究では扱われていないが，実用的なアルゴリズムを構成する際には必要不可欠なものである．対象とする問題は，グラフマイナー理論に基づくアルゴリズム全体であるが，特に点素（辺素）パス問題に対するアルゴリズムとその亜種を中心に扱う．

３．研究の方法

課題(A)　<u>新たな問題に対する，グラフマイナー理論を用いたアプローチ</u>

課題（A）では，グラフマイナー理論に基づく手法の，他の問題への適用を試みる．具体的には，グラフマイナー理論と相性が良いと思われる以下のような問題を中心に扱う．

まず，グラフマイナー理論によって解決されている点素（辺素）パス問題は非常に単純な形であるため，点素（辺素）パス問題から派生する問題が数多く考えられる．これらの派生する問題の中には，理論，実用の両面において興味深い未解決問題が数多く含まれている．

また，指定された頂点を通るサイクルを見つける問題も，グラフマイナー理論と深く関係した問題であり，この問題から派生した問題も考えることができる．具体例としては，
「グラフ中に指定頂点を一つ以上含むサイクルを，k 個点素に取れるか？」
といった問題が挙げられる．

これらの問題は，既にグラフマイナー理論を用いて解決されている問題のバリエーションであるので，既存研究の手法を拡張して解決を目指す．

さらに，グラフマイナー理論は点素パスやサイクルだけを扱っているわけではなく，「マイナーに関して閉じている」という性質を持つより広いグラフのクラスを扱っている．そこで，上記の問題以外でも，グラフマイナー理論と関連している構造に対して，グラフマイナー理論に基づいたアルゴリズムの構成を目指す．

課題(B)　<u>既存のアルゴリズムの高速化・簡</u>

略化

グラフマイナー理論に基づく既存のアルゴリズムは，計算時間が入力サイズの多項式のオーダーではあるが，理論的にも実用的にも到底効率的なアルゴリズムとは言えないものである．例えば，頂点対が定数（k 組）の点素パス問題に対する Robertson and Seymour のアルゴリズムは,計算時間が $O(n^3)$ であるが（n はグラフの頂点数），以下のような問題点がある．

(B-1)　$O(n^3)$ では計算時間が長い．
(B-2)　k に依存する係数が非常に大きな定数である．
(B-3)　アルゴリズム自体が複雑である．

そこで，本課題では既存のアルゴリズムを改良して，これらの問題を解決することを目指す．

(B-1) 理論的な高速化
まず一つ目の目的は，理論的な計算時間を改良することである．例えば，点素パス問題であれば $O(n^3)$ の計算時間を $O(n^2)$ や $O(n \log n)$ に改良することを意味している．計算量の改良は理論的に興味深いものであるだけでなく，実用的に効率的なアルゴリズムを構成することに繋がると考えられる．

(B-2) 係数の小さなアルゴリズムの構築
二つ目の目的は，理論的な計算時間では隠れている，k に依存する係数を小さくすることである．点素パス問題に対する Robertson and Seymour のアルゴリズムの計算時間は，

（k に依存する非常に大きな係数）× n^3

であり，この係数は k = 2, 3 の場合でさえも天文学的な大きさになってしまう．そのため，アルゴリズムはとても実用的とは言えないものである．係数の小さなアルゴリズムを構成することは，「定数の大小は無視する」という理論家の立場からはそれほど大きな意味はないかもしれないが，実用的な意味での効率を考えると非常に大きな意味を持つものである．また，係数を正確に見積もることは，アルゴリズムを実装する際にも不可欠である．

(B-3) 単純なアルゴリズムの構築
三つ目の目的は，アルゴリズム自体を簡潔にして，実装を容易にすることである．本研究では，既存のアルゴリズムを基本として難解な箇所を改良し，計算時間をあまり変えずによりシンプルなアルゴリズムを構成したいと思っている．このことは，アルゴリズムの実装を容易にし，将来の実用化に向けての土台になると考えている．また，シンプルなアルゴリズムの構成はグラフマイナー理論に基づくアルゴリズムをより深く理解する助けになると考えている．

４．研究成果

課題(A)　新たな問題に対する，グラフマイナー理論を用いたアプローチ

課題(A)における本研究の最大の成果は，S-サイクルパッキング問題に対して固定パラメータアルゴリズムを与えたことである．

グラフ中に頂点集合 S が指定されたときに，S を通るサイクルを S-サイクルと呼び，グラフ中に点素な S-サイクルを k 個見つける問題を S-サイクルパッキング問題と呼ぶ．この問題は，グラフアルゴリズムやグラフ理論で盛んに研究されているサイクルパッキング問題の一つである．S-サイクル問題は点素パス問題の一般化となっているが，点素パス問題の指定頂点対数が定数であるのに対して，指定頂点数が定数でないという意味で大きく難しさの違う問題である．

本研究では S-cycle パッキング問題に対して，詰め込むサイクルの個数 k をパラメータとして，初の固定パラメータアルゴリズムの提案を行った．我々のアルゴリズムは，点素パス問題に使われているグラフマイナー理論の手法と，グラフアルゴリズムの手法を組み合わせたものである．

次に，S-サイクルパッキング問題の双対というべき問題である，subset feedback set 問題に対しても固定パラメータアルゴリズムを提案した．この問題は，サイズ k 以下の頂点集合 X で，すべての S-cycle を被覆するものを見つける問題である．我々のアルゴリズムは k を定数だと見たときに，計算時間が $O(n^2m)$ となるものである（ただし，n, m はグラフの頂点数と枝数）．

我々の結果は，グラフマイナー理論を利用することで，多項式時間で解ける問題のクラスを広げるものとなっている．

課題(B)　既存のアルゴリズムの高速化・簡略化

課題(B) における最大の成果は，点素パス問題に対するアルゴリズムを $O(n^3)$ から $O(n^2)$ へ改良したことである．この改良は，グラフマ

イナー理論に加えて，多くのグラフアルゴリズムの手法を組み合わせることで実現されており，理論的に重要な結果である．

また，この結果と同様の手法を用いることにより，辺素パス問題や，指定されたグラフをマイナーに含むかどうか判定する問題など，グラフマイナー理論に基づくいくつかの問題に対しても，従来よりも高速な $O(n^2)$時間アルゴリズムを与えた．

次に，グラフのクラスをオイラー的なグラフや４辺連結なグラフに制限した辺素パス問題に対して，より単純で高速なアルゴリズムの提案を行なった．

辺素（点素）パス問題に対する従来の Robertson-Seymour のアルゴリズムにおいては，「大きなサイズの，ほぼ平面的なグリッドグラフが存在すれば，その中心の点は辺素（点素）パスの存在に無関係である．」という事実が重要な役割を果たしている．そしてアルゴリズムの計算時間が頂点対数ｋに依存する非常に大きな係数を含んでいることや，正当性の証明が難解であることは，この部分の難解さに起因している．

本研究では，グラフクラスを制限した際の辺素パス問題においては，上で述べた事実を用いずにアルゴリズムを構築できることを示した．そのため，提案アルゴリズムは単純で，正当性の証明が簡単なものであり，さらに計算時間がより小さなｋの関数に依存するものとなっている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Ken-ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi: Fixed-parameter tractability for the subset feedback set problem and the S-cycle packing problem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102 (2012), pp. 1020--1034.
DOI：10.1016/j.jctb.2011.12.001

② Ken-ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi：A linear time algorithm for the induced disjoint paths problem in planar graphs, *Journal of Computer and System Sciences*, 78 (2012), pp. 670--680.
DOI：10.1016/j.jcss.2011.10.004

③ Ken-ichi Kawarabayashi, Yusuke Kobayashi, and Bruce Reed：The disjoint paths problem in quadratic time, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102 (2012), pp. 424--435.
DOI：10.1016/j.jctb.2011.07.004

〔学会発表〕（計８件）

① Ken-ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi：Improved algorithm for the half-disjoint paths problem, The 13th *International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX 2010)*, Barcelona, Spain, September 2010.

② Ken-ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi：An O(log n)-approximation algorithm for the disjoint paths problem in Eulerian planar graphs and 4-edge-connected planar graphs, *The 13th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX 2010)*, Barcelona, Spain, September 2010.

③ 小林佑輔：点素パス問題に対するアルゴリズム，組合せ最適化セミナー，京都大学，2012 年７月．（招待講演）

〔その他〕
ホームページ等

ホームページ
http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~y-koba/

６．研究組織
(1)研究代表者
　小林　佑輔（KOBAYASHI YUSUKE）
　東京大学・大学院情報理工学系研究科・助教
　研究者番号：40581591

(2)研究分担者
　無し

(3)連携研究者
　無し