

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号： 14301

研究種目： 研究活動スタート支援

研究期間： 2010～2011

課題番号： 22800032

研究課題名（和文）

論理式の構造的複雑さ解明

研究課題名（英文）

Clarification of Structural Complexity of Formula

研究代表者

上野 賢哉 (UENO KENYA)

京都大学・次世代研究者育成センター・助教

研究者番号： 70586081

研究成果の概要（和文）： 線形計画法を利用した論理式サイズの下界証明手法を拡張した研究成果をさらに理論的に緻密化した上で論文 2 本をとりまとめ、一つは学術誌(Theoretical Computer Science)へ採択、もう一つは、国際会議(MFCS2010)にて発表を行った。また、拡張された論理式モデルを定義し、その複雑さに関して理論的な解析を与えた。この成果に関する論文は、国際会議(COCOON2012)に採択され、発表予定となっている。さらに、超二次論理式サイズ下界証明の候補となる論理関数に関して分析を行い、論文を完成させた。

研究成果の概要（英文）： We have written two papers concerned with the linear programming based method for formula size lower bounds after polishing its theoretical result. One is accepted for publication in a journal (Theoretical Computer Science), and the other is presented at an international conference (MFCS 2010). We also defined an extended formula model and give a theoretical analysis on its complexity. The paper concerned with this result is accepted and will be presented at an international conference (COCOON 2012). Furthermore, we have analyzed candidate Boolean functions towards super-quadratic formula size lower bounds and completed a paper.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,250,000	375,000	1,625,000
2011 年度	1,150,000	345,000	1,495,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野： 計算量理論

科研費の分科・細目： 情報学・情報学基礎

キーワード： 論理関数, 線形計画法, 計算限界

## 1. 研究開始当初の背景

1930 年代にはじまる計算可能性理論の研究により、コンピュータによって計算可能なものと計算不可能なものの区別が数学的に明らかになった。その後 1960 年代からの計

算量理論の研究により、計算可能なものの中でも実際に人間が生きている間の時間にはとても計算が終わらないようなものが存在することが認識され始めた。また、現実のコンピュータではメモリの量にも制約があるため、非常に多くの空間を要するアルゴリズム

ムを実行することは不可能である。計算に要する時間と空間の関係を解明することは、計算における普遍的・抽象的な真理を探索するといった理学的な観点からも非常に興味深いだけでなく、アルゴリズムを実際に与えられた状況下で実行することができるかを判断するといったアルゴリズム工学的な側面からも非常に重要である。

本研究課題で焦点をあてる論理式サイズと呼ばれる計算モデルに対して超多項式の下界を示すことに成功すれば、 $NC^1 \neq NP$ と呼ばれる重要未解決問題を解決したことになる。これは数学の7大未解決問題として有名な $P \neq NP$ 問題よりも若干弱い帰結となっており、したがって、 $P \neq NP$ の解決の前にはこの問題の打破が必須となるものである。

$NC^1$ と名付けられる計算量クラスは、入力長に深さが対数程度の大きさの論理回路によって計算される問題のクラスとなっており、多項式サイズの論理式で計算可能な問題と等価であることが知られており、非常に重要な位置づけを占める概念である。また、論理式サイズそのものもSATと呼ばれる問題の表現と同じものであり、情報科学全般において非常に基本となる概念となっており、本質的に重要な研究対象である。

しかし、長年にわたって多くの努力がなされる一方で、未だにこれらの問題を解決するための決定的な方向性すら見つかっていないというのが現状である。また、論理回路・論理式サイズといった計算モデルに対する下界証明技術には、数学的に証明された多くの限界が知られており、限界突破のためには本質的に新しい技術が求められている。これらの問題に対して最終解決が導かれることは、ある特定の問題に対しては、どんなに上手い方法論を駆使したとしても、効率の良いアルゴリズムを構成することは不可能であることが数学的に証明されることになり、すなわち計算の限界を解明することにつながる。

論理式サイズ下界の証明は、純粋な理論的興味だけにとどまらず、並列計算理論などの応用面においてもその重要性は極めて大きい。 $NC^1$ という計算クラスは、効率よく並列化が可能なアルゴリズムに対応する概念として導入された。したがって、強い下界を証明することで、アルゴリズムに対して本質的に並列化が不可能であることを数学的に裏付けることができる。

## 2. 研究の目的

論理式の構造的複雑さを総合的に解明していくことにより、計算理論の基盤を固める。特に、線形計画法における基礎理論をもとに、計算機科学における本質的かつ最重要課題

の1つである論理式サイズ下界を証明する技術の開発を行い、下界値の改良を目指す。

論理式サイズ下界証明は、計算理論において基本的な問題であるため数十年以上に渡る歴史がある。中でも、一番有名な古典的手法であるのは、1971年に発表されたKhrapchenkoによる方法である。その後、多くの研究者によってこの手法の拡張版がなされてきたが、実際に下界値を改良するまでには至らなかった。

それに対して、本研究で得られた研究成果においては、多数決関数(Majority Function)と呼ばれる基本的関数に対して1971年よりはじめて下界値を改良することに成功した。本研究計画では、その成功をさらに大きく押し進めることを目指している。最終的に既存の論理式サイズ下界の最良のものである $n^3$ の下界値(Håstadによる1998年の結果)を超えるための基礎となる技術を開発することを目標とする。

多数決関数は、その多項式の上界が知られているため超多項式の下界は望めないが、論理関数理論における最も基本的な対象として長く研究されてきており、その実際の論理式サイズの決定も長年の未解決問題である。したがって、それ自体で非常にインパクトの大きい可能性の秘めた研究目標となる。さらに、その構造は超多項式下界の証明が有望なクリーク関数と類似しているため、その解析は非常に有用である。本研究では、まず多数決関数の論理式サイズの値を上界・下界の両面から解明する。

## 3. 研究の方法

本研究で既に関数している論理式サイズの強力な下界となりうる線形計法定式化に対して、紙の上での数学的論証から解空間を探索し、目的関数値を押し上げることにより、下界値を漸近的に改良していく。このために計算機を援用した実験および結果の解析も実行していき、理論解析の足掛りとする。より具体的な研究方法を以下の通りである。

本研究では、Karchmer, Kushilevitz and Nisanが1995年に発表した論文において導入した手法に着目し、その技術を飛躍的に発展させてきた。Karchmer, Kushilevitz and Nisanは、線形計画法理論における線形緩和・双対定理を利用し、論理式サイズ下界を与える線形計画限界と呼ばれる手法を導入した。彼らの証明手法では、論理式サイズの下界を、ある特定の整数計画問題の最適解として定式化し、その線形計画緩和の双対問題に対する実行可能界を与えることで、下界値を与える。

近年、この線形計画限界が多くの既存の証明手法を包括することが明らかにされてき

た。これには、最良の下界を示した Håstad による証明の鍵となる補題も含まれている。また、Håstad による手法はある論理関数に特化した非常に特殊な方法であり、それ以上は下界値が改良できる余地がないといった限界も明らかにされている。したがって、線形計画限界に着目するのは当然な発想ではあるものの、技術的な困難さからこれまで誰もそれを改良することができないでいた。

研究計画では、本研究計画提案においては、これまでに開発してきた強力な論理式サイズ下界証明技術を有機的に結び合わせつつ、その線形計画法における解空間の構造を解明することにより、論理式サイズの強力な下界へ向けて、基礎理論を発展させることにより、計算量理論分野のものならず数理計画・最適化分野に対してもインパクトを与えることを目標に研究を推進する。

理論・基礎研究という性格上、研究計画については国内外の研究情勢や自発的な意外性のあるアイデアに基づいて柔軟に舵取りを行い推進していく計画となっている。特に、研究を進める上で新たに出てきた知見や関連分野における研究の発展などを考慮し、柔軟に研究計画・方法は修正していく。

#### 4. 研究成果

本研究計画は、平成 22~23 年度に渡って行われ、以下のような研究成果およびその発表・出版を得ることができた。

##### (1) クリーク制約式による論理式サイズ下界のための強化線形計画限界

国際会議 (STACS2009) において発表した研究成果について、本研究計画の期間内において論文誌「Theoretical Computer Science」へと投稿を行い、証明を精緻化し、論文の品質をさらに向上させた上で、採択に至ることができた。これに関する研究成果の概要は、以下の通りである。

安定集合多面体の理論に基づき、Karchmer, Kushilevitz and Nisan によって導入された線形計画限界を拡張し論理式サイズ下界を証明する新しい技法を導入した。この新しい技法を多数決関数に適用することで、Khrapchenko による古典的結果から論理式サイズの下界を改良することができた。

さらに、単調自己双対論理関数の分解理論からの動機付けにより非平衡再帰3分多数決関数の概念を導入し、それらの論理式サイズの整数的に最適な上界と下界を示した。

また、平衡再帰3分多数決関数の単調論理式サイズに対して Laplante, Lee and Szegedy

の量子敵対者限界により得られた値より改良された下界を示すことが可能になった。

##### (2) 論理式サイズ下界に対する長方形限界障壁の突破

Karchmer, Kushilevitz and Nisan によって導入された線形計画限界を以下の述べる 2 通りの方法で強化した論理式サイズ下界技術を開発してきた。

1 つ目の方法は、Sherali-Adams の Lift-and-Project Method と呼ばれる手法を利用したものである。Lift-and-Project Method とは、体系的に既存の証明手法の障壁となる整数性ギャップと呼ばれるものを無くすることができる、非常に優れたものである。したがって、研究の最終目的である超多項式下界を証明する可能性のあるポテンシャルの高い証明技法となっている。

2 つ目の方法においては、形式的複雑性尺度 (Formal Complexity Measure) と呼ばれる抽象的概念を利用して、擬加法的尺度と名付けられたまったく新しい形式の線形計画限界の拡張版を導入した。この技術の具体的論理関数への適用し、おおもとの整数計画問題の最適解をも上回る下界値を与えることが可能であることを示した。これは、提案技術の極めて高い潜在能力を示唆するものであると同時に、線形計画法及び多面体理論の観点からも従来の常識を覆す非常に興味深い結果となっている。

この成果に関しては、その提案証明技法の潜在可能性に対してより精密な検証・解析を新たに付与することができ、より完成度の高い論文とすることができた。これを 1 つの論文としてとりまとめ、国際会議 (MFCS2010) に投稿し採択され、2010年8月にチェコのブルノにおいて発表を行った。

##### (3) 3 分木多数決関数の論理式複雑さ

既存の論理式モデルの解析技術へと突破口を見開くため、論理式モデルの概念拡張を行い新たな視点から、その構造的な複雑さの解明へと解析を行った。

一般に、自己双対論理関数と呼ばれる特殊な論理関数の族は、3 ビットの多数決関数の合成へと分解できることが知られている。既存の論理式のモデルは、入力に 2 ビットの素子から構成されるものが主流であるが、これに対して本研究では入力に 3 ビットの多数決関数のみからなる論理式モデルを定義した。

拡張された論理式モデルに対して新しい

一般的な下界証明法を与えるとともに、いくつかの基本的な論理関数に対して上界の証明を行った。拡張された論理式のサイズ下界を証明するための一般的な手法を与えるために、3ビットの多数決論理関数のみから構成される論理式と従来型の論理式を比較し、それらが最も複雑さが分離される場合を詳細に解析した。

これらの成果を一つの論文としてまとめ、国内研究会にて発表を行った。その後、国際会議 COCOON2012 へ採択され、2012年8月にオーストラリアのシドニーにて発表予定となっている。

#### (4) 超二次論理式サイズへ向けた候補となる論理関数

論理式サイズの超二次サイズ下界証明という目的達成のために、対象となる論理関数の性質に関して解析を行った。

まず、再帰的に定義される一般的な論理関数の族に対してその論理式サイズ下界の証明の可能性と限界に関して明らかにすることができた。また、超二次論理式サイズが証明できる可能性のある候補となる論理関数として、厳密2ビット論理関数を基底として定義される再帰的論理関数を解析し、実際に、その論理式の複雑さが少なくとも二次的なものであることを示すことができた。

さらに、これまで論理式サイズの超二次下界を証明するための主要な候補であった多数決関数の性質に対し、その超二次サイズ下界の証明に対する困難性に関して、偶奇判定関数との対比しながら分析を行った。

これらの成果を一つの論文としてとりまとめ、国内研究会において発表を予定しているとともに、国際会議への投稿を行っている。これに関する予備的な報告に関しては、4月に開催された国際会議 AAAC2011 にて発表を行った。

#### (5) その他の研究活動

研究活動をスタートしていく上で必要となる計算機・ソフトウェア環境の構築および整備を推進することができた。これにより、理論解析への足掛かりとなる計算機実験を行い、有用な結果を得ることができた。

また、海外の主要な国際会議や国内研究会等へ出向き最新の研究動向調査および討議などを行うことができた。特に、証明論と計算可能性理論に関するワークショップにおいては、研究成果全般に関して近接分野の研究者に対し、講演を行った。

その他の具体的な研究内容として、線形計画問題への解構造探索へ有用であると思われる道具の調査およびその解析を行った。特

に、整数計画問題に対する双対性理論と劣化法構造の関連やグラフ・エントロピーを利用した下界証明手法、外測度理論、さらには、非負行列の分解を利用した線形計画法のサイズ下界に対する革新的証明手法に関して調査・研究を行った。

これらの調査結果は、平成24年度からの新規の研究計画である「劣加法構造探索による計算理論の新展開」(若手研究(B))へと発展的に引き継がれていく予定である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① Kenya Ueno: Formula Complexity of Ternary Majorities. In Proceedings of The 18th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON 2012). Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 2012. 査読有, 掲載予定

② Kenya Ueno: A Stronger LP Bound for Formula Size Lower Bounds via Clique Constraints, Theoretical Computer Science, Vol. 434, pp. 87-97, Elsevier, May 2012. 査読有  
dx. doi.org/10.1016/j.tcs.2012.02.005

③ Kenya Ueno: Breaking the Rectangle Bound Barrier against Formula Size Lower Bounds. In Proceedings of The 35th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2010). Lecture Notes in Computer Science 6281, pp. 665-676, Springer-Verlag, 2010. 査読有  
dx. doi.org/10.1007/978-3-642-15155-2\_58

[学会発表] (計4件)

① 上野 賢哉: “多数決3分木への論理式分解”, 冬のLAシンポジウム, 京都,

2012年1月30日.

- ② Kenya Ueno: “Parity versus Majority: Formula Complexity Perspective”, The First AAAC Annual Meeting (AAAC2011), HsinChu, Taiwan, April 16, 2011.
- ③ Kenya Ueno: “Proof Methods for Formula Size Lower Bounds: Classics and Frontier”, Workshop on Proof Theory and Computability Theory, Iwanumaya, Akiu Spa, Sendai, February 22, 2011.
- ④ Kenya Ueno: “Breaking the Rectangle Bound Barrier against Formula Size Lower Bounds.” The 35th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2010), Masaryk University, Brno, Czech Republic, August 27, 2010.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~kenya/index-j.html>

2011年10月25日に開催された学術情報メディアセンターセミナーにおいて、「論理式の複雑さを明らかにする理論」と題し、関連する研究成果について一般向けに教育講演を行った。

「科学・技術フェスタ in 京都 2011」にて高校生・大学生と議論する公開シンポジウムに参画した。

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

上野 賢哉 (UENO KENYA)

京都大学・次世代研究者育成センター・助教

研究者番号: 70586081

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: