

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：14301
 研究種目：研究活動スタート支援
 研究期間：2010～2011
 課題番号：22800033
 研究課題名（和文） 証明の複雑さにおけるグラフ理論的手法の構築
 研究課題名（英文） Development of Graph Theoretical Analysis for Proof Complexity
 研究代表者
 脊戸 和寿 (Kazuhisa Seto)
 京都大学・情報学研究科・特定研究員
 研究者番号：20584056

研究成果の概要（和文）：理論計算機科学分野における大きな未解決問題の 1 つに、NP 対 coNP 問題があげられる。この問題に対する重要なアプローチ法に証明の複雑さの研究がある。本研究では、既存の論理式に対する証明系に焦点をあてた研究ではなく、グラフに対するグラフ計算論法を用いた研究を行い、証明系とグラフ計算論法の計算能力における関係を得ることに成功した。また、対象としたグラフ計算論法をシミュレートする列挙アルゴリズムを実装し実際に実験を行った。

研究成果の概要（英文）：NP versus coNP problem is one of the fundamental open problems in theoretical computer science. To study proof complexity is the main approach to resolve this problem. In previous works, many researches have been done on proof systems for Boolean functions, but we studied proof complexity via graph calculus, mainly Hajos Calculus. We obtained the relationship between the complexity of proof systems and that of graph calculus. Moreover, we can implement an enumeration algorithm generating non-3-colorable graphs. This algorithm simulates a part of Hajos Calculus for planar graphs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,050,000	315,000	1,365,000
2011 年度	960,000	288,000	1,248,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,010,000	603,000	2,613,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：計算量理論, グラフ理論, 証明複雑さ, Hajos Calculus

1. 研究開始当初の背景

理論計算機科学分野における大きな未解決問題の 1 つに、NP 対 coNP 問題があげられ

る。これは有名な P 対 NP 問題と同様に非常に重要な問題であり、解決に向け日々、世界中で研究が行われている。この問題に対する主要なアプローチ方法に証明の複雑さの研

究がある。

証明の複雑さとは、与えられた論理式が恒真式であることを、公理から始め、推論規則を用いることで証明するときに（このような公理と推論規則をもつ機構を証明系とよぶ）、必要とされる証明のサイズ（推論規則の適用回数）を、入力される式のサイズの関数として定量的に評価する研究である。

その中でも証明の複雑さの下界は非常に興味深い話題である。証明の複雑さの下界とは、ある証明系において論理式の恒真性を示す際に、どのように推論規則を適用したとしても、恒真性を示すのに絶対に必要となる証明のサイズのことをいう。この値が、任意の証明系に対して超多項式サイズとなるような論理式を見つけることができれば、NP 対 coNP 問題を解決することが可能である。このことは、P 対 NP 問題の解決も意味することから、非常に重要な研究である。

しかし、証明系の中でも非常に強力であるとされる Extended Frege System において現在知られている証明サイズの下界は高々、線形程度であり、目標とする超多項式サイズの下界とは大きな開きがある。それどころか、少し弱い証明系である Frege に対しても線形下界以上のことは何もわかっていない。

このような状況を打開するには、既存手法のみでは非常に厳しく、新たな下界証明手法が必要とされている。

2. 研究の目的

本研究の最終目的は、新たな下界解析手法の開発と、それによる証明複雑さの下界証明である。既存手法のほとんどが論理式に対するアプローチであり、証明の複雑さにおける下界証明は停滞していると言っても過言ではない。これに対し、本研究ではグラフ理論的手法による新たな知見の獲得及び下界証明手法の開発を目的とし、現状の打破を目標とする。特に、非常に強力な証明系であるとされている Extended Frege System と多項式等価な能力をもつ、Hajos Calculus というグラフ計算論法に関する研究を中心に行う。とりわけ、研究代表者らが既存研究で開発した Planar Hajos Calculus に焦点をあてる。

Hajos Calculus とは、3 彩色不能なグラフを 4 頂点の完全グラフ（これは 3 彩色不能な最小のグラフである）から始め、3 つのルール（頂点と枝の追加、ある条件下での枝の削除、頂点の縮約）のうち、1 つを非決定的に適用していくことで、新たな 3 彩色不能なグ

ラフを生成していくグラフ計算論法である。この計算論法は全ての 3 彩色不能なグラフを生成することが既存研究により示されており、さらに Extended Frege System と多項式等価な計算能力を持つことが示されている。つまり、Hajos Calculus で生成ステップに超多項式回のルール適用を必要とするグラフを発見することができれば、そのグラフに対応する論理式が Extended Frege System において証明サイズの下界が超多項式である論理式となっているのである。

また、研究代表者らの既存研究によって、このグラフのクラスを平面グラフに限定した計算論法である Planar Hajos Calculus は、平面グラフの生成において、Hajos Calculus と多項式等価な能力をもつことがわかっている。つまり、Planar Hajos Calculus で生成困難な平面グラフは、Hajos Calculus でも生成が困難であることを示している。

さらに、グラフ理論には数多くの有用な定理が知られており、それらとグラフ計算論法である Hajos Calculus や Planar Hajos Calculus の特性を結びつけることで、証明の複雑さに対する新たな下界証明手法、さらには計算量理論分野全体に通ずる下界証明手法を開発することが本研究の最大の目標である。

3. 研究の方法

本研究では、証明複雑さに関する研究を行い、既存の論理式に対するアプローチとは異なる、グラフ理論的アプローチによる新たな知見の獲得、及び新たな下界証明手法の開発を目的とし、Extended Frege System と多項式等価な能力をもつ Hajos Calculus、特に代表者らが既存研究において開発した Planar Hajos Calculus を中心とした研究を行う。

Planar Hajos Calculus とグラフ理論における既存手法、とりわけ、平面グラフに対する既存手法を組み合わせることにより、証明複雑さにおける証明サイズの下界証明手法の開発と解析を行う。それと平行して Hajos Calculus で実際に構成が困難であるグラフの候補やそれらの持つ構造を計算機実験により発見することも考える。

具体的には以下の 3 つを基本として研究をおこなっていく。

- (1) Hajos Calculus をシミュレートする 3 彩色不能な平面グラフを列挙する列挙アルゴリズムの高速化と視覚化

研究代表者らが既に開発した Planar Hajos Calculus を部分的にシミュレートし、全ての 3 彩色不能な平面グラフを生成する列挙アルゴリズムをより高速化かつ視覚化することを目標とする。

現在のアルゴリズムは非常に単純かつ明快なアルゴリズムであるが、その反面、列挙に要する計算時間やメモリ量が膨大なものとなっている。そのため実際に現実的な時間と資源で列挙できるグラフの数はそれほど多くなく、これらのグラフから得ることのできる知見は多くない。この改善に向け、列挙アルゴリズムで用いられる様々な優れた技法を学習し、現在のアルゴリズムに適用可能なものを組み込むことで、高速化を行う。さらに大きな課題として列挙過程及び生成グラフの視覚化もあげられる。

これらの高速化及び視覚化を行うことで、下界証明に向けて有用である知見 (Hajos Calculus により生成が困難であるような構造の発見や具体的に生成困難なグラフの候補) の獲得を目標とする。

(2) グラフ理論的手法による下界証明法の構築

Extended Frege System に対するグラフ理論的下界証明手法の構築を目標とする。また、Extended Frege System だけでなく、その他の証明系と等価であるグラフの計算論法を開発し、それに対応する証明系で既に知られている下界をグラフ理論的手法によって導く。

これには Extended Frege System 及び Frege に対する下界証明において既存手法がうまく働かない原因を理解し、Hajos Calculus において、それらを打開できるようなグラフ理論的手法がないかを調査する。また、どのようなグラフ計算論法を構築すれば、既知の証明系に対応するのかを精査し、実際に開発、グラフ理論的手法での下界の解析を行う。

(3) Planar Hajos Calculus に更なる制限を加えたグラフ計算論法と Hajos Calculus の計算能力差の解明。

Planar Hajos Calculus は元の Hajos Calculus のルールに平面操作のみを許したものである。このグラフ計算論法の生成ルールにさらに制限を加えたときに、グラフ計算論法が元の Hajos Calculus と比べてどれくらいの能力になるのかを解明することを目標とする。

生成ルールに対する様々な制限が考えられるため、文献等を精査し、より妥当な制限を採用し、その制限を取り入れたグラフ計算論法の能力を解析する。もし、その計算能力が Planar Hajos Calculus と同等であれば、そのグラフ計算論法を対象にした研究を行う。

4. 研究成果

(1) 次数制限版Hajos Calculusの計算能力の解明(雑誌論文[1])

生成されるグラフのクラスを平面グラフに限定した計算論法であるPlanar Hajos Calculusは既存研究で平面グラフの生成においてはHajos Calculusと多項式等価な能力を持つことが示されている。

本研究では、さらにグラフの生成ルールにおいて次数制限を加えたPHC(d)というグラフ計算論法を提案し、その能力の解明を行った。まず、生成過程に現れる全てのグラフの最大次数を4に限定したグラフ計算論法であるPHC(4)では、最大次数が4である特定のグラフが生成できないことを示した。また最大次数が4の任意のグラフはPHC(6)によって生成可能であることを示した。本結果は次数制限を加えたHajos Calculusの計算能力は元のHajos CalculusやPlanar Hajos Calculusの計算能力より劣ることを示している。

今後の方向性としては、その他の制限で、Planar Hajos Calculusと同等の能力をもつグラフ計算論法の開発か、もしくは、Planar Hajos Calculusにこれ以上の制限を加えると、常に計算能力が弱くなることを示すことが考えられる。

(2) PHCを部分的にシミュレートする列挙アルゴリズムの高速化。

本研究では、2009年度に構築していたPHCを部分的にシミュレートする列挙アルゴリズムの高速化を行った。このアルゴリズムはPlanar Hajos Calculusから縮約というルールを除いたグラフ計算論法であるPHC'を基に設計している。

具体的には、アルゴリズム内で用いられていたグラフ同型性判定の部分より高速なアルゴリズムに組み替え、さらにデータ構造等を工夫することにより、既に実装済みであった列挙アルゴリズムを約10倍速くすることに

成功した。元のアルゴリズム全体の仕様はほとんど変わっていないため、現時点で、これ以上の高速化はほとんど不可能であると考えられる。

しかし、アルゴリズムの大幅な改変等により、メモリの節約や高速化は十分に可能性を秘めており、今後は列挙アルゴリズムで知られる数々の手法の適用を試みることで更なる高速化を狙う。視覚化に関しては現時点で全く出来ていない状況にあるので、出来る限り早急に視覚化をすることを目標とする。

計算時間やメモリの削減に関しては、グラフ同型性判定の部分を省くことができれば、大幅に改良ができるものと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

[1] K. Iwama, K. Seto and S. Tamaki.
The Planar Hajos Calculus for Bounded Degree Graphs.
IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 査読有, E93-A(6): 1000-1007, 2010

[学会発表] (計 3 件)

[1] K. Seto and S. Tamaki.
A Satisfiability Algorithm and Average-Case Hardness for Formulas over the Full Binary Basis.
In proceedings of the 27th IEEE Conference on Computational Complexity, June 2012, Porto, Portugal, to appear.

[2] K. Seto and S. Tamaki.
A Satisfiability Algorithm for Formulas over the Full Binary Basis.
RIMS 研究集会「アルゴリズムと計算理論の新展開」(冬の LA シンポジウム) 予稿, pp. 3-1--3-14, January 2012, Kyoto, Japan.

[3] K. Iwama, K. Seto, T. Takai and S. Tamaki.
Improved Randomized Algorithms for 3-SAT.
In proceedings of the 21st International Symposium on Algorithms and Computation, LNCS 6506, pp. 73-84, December 2010, Jeju, Korea.

[その他]

ホームページ

<http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~seto/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

脊戸 和寿 (Kazuhisa Seto)

京都大学・情報学研究科・特定研究員

研究者番号: 20584506

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし