

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月12日現在

機関番号：13601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22840022

研究課題名（和文）量子場と相互作用する量子系のスペクトル解析

研究課題名（英文）Spectral analysis of a quantum system interacting with a quantum field

研究代表者

鈴木 章斗（SUZUKI AKITO）

信州大学・工学部・助教

研究者番号：70585611

研究成果の概要（和文）：パウリ・フィールツ模型は、外力ポテンシャル中を運動する非相対論的な量子的粒子と量子電磁場の相互作用を記述する。本研究では、相互作用の強さを表す結合定数が十分小さいとき、パウリ・フィールツ模型の基底状態（最低エネルギーの状態またはハミルトニアンの特値の下限の固有値）が非存在になることを示した。また基底状態が非存在になるための結合定数の大きさの限界を求めることができた。

研究成果の概要（英文）：The Pauli-Fierz model describes the interaction between a nonrelativistic quantum particle moving under the influence of an external potential and a quantized electromagnetic field. In this research, we showed the absence of ground states of the Pauli-Fierz model for a sufficiently small coupling constant describing the strength of the interaction and obtained the critical value of the coupling constant for which there is no ground state.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	920,000	276,000	1,196,000
2011年度	840,000	252,000	1,092,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,760,000	528,000	2,288,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：基底状態、スペクトル解析、場の量子論、束縛の強化、パウリ・フィールツ模型、ネルソン模型

1. 研究開始当初の背景

量子場と相互作用する量子系の基底状態が相互作用の強さを表す結合定数の大きさによって、存在したり、非存在になったりする現象が知られている。特に、相互作用がないとき（すなわち、結合定数がゼロのとき）は、基底状態が存在しなくても、結合定数が大きくなると基底状態が現れる現象

は、束縛の強化と呼ばれる。すべての結合定数（したがって結合定数がゼロのときも含む）に対して基底状態が存在する模型の研究は、この20年の間にたくさんの研究者によってさまざまな模型で調べられている。また、束縛の強化についてもこの10年の間に大きく発展した研究領域のひとつである。基底状態の存在証明に比べ、基底状態が非存在になることの証明は十分研究されているとは

言い難い状況にある。基底状態の非存在を示す方法として知られているのは、背理法によるものと赤外発散とよばれる場の量子論特有の（低エネルギーのボソンの個数が無限大に発散することで起きるとされる）現象に起因するものの二つが知られていたが、結合定数に応じて基底状態の非存在になることを示す方法は知られていなかった。

これに対し、双極近似されたパウリ・フィールツ模型（非相対論的な荷電粒子と量子電磁場が相互作用する量子系を記述する非相対論的量子電磁気学の模型）に関する予備的な検討を行った結果、Feshbach map を用いれば、少なくとも十分小さい結合定数に関しては基底状態の非存在が証明可能であることがわかっていった。一方で、廣島-Spohn による既存の研究から結合定数が十分大きいときは基底状態が存在することが知られていた。しかし、非存在または存在が証明されている結合定数以外の中間領域では何が起きるかわかっていなかった。また、パウリ・フィールツ模型以外の量子場と相互作用する量子系の場合は、結合定数の大きさと基底状態の非存在との関係は全く不明であった。

2. 研究の目的

双極近似された Pauli-Fierz 模型の基底状態の非存在を証明する際に用いる Feshbach map は、それを使用するために結合定数の大きさに制限がついてしまうという欠点があった。非存在の証明にあたり、この欠点を克服して、基底状態の非存在となるような結合定数の限界を調べ、結合定数が中間領域にあるときに基底状態が存在するか否かを明らかにする。また、双極近似された Pauli-Fierz 模型以外の模型に対しても、結合定数の大きさによって基底状態の存在と非存在がどのように変化するかについても調べる。

3. 研究の方法

基底状態の非存在を証明するために開発した Feshbach map を用いる作用素論的な方法（とそれを拡張した方法）を用いて、量子場と相互作用する量子系を記述するさまざまな模型のハミルトニアン基底状態の非存在を証明する。この方法は、従来知られていた非存在証明法（背理法を用いるものと赤外発散に起因するもの）とは異なり、非存在性の証明を行うと同時に結合定数の大きさを見積もることが可能なため、本研究の目的を達成するために適した方法である。

また、基底状態が非存在にならない結合定数の領域に関しては、先行結果である廣島-Spohn の方法を改良して、できるだけ広い範囲の結合定数に対して、基底状態の存在を示す。

4. 研究成果

研究当初の予備的検討で用いられた Feshbach map を使う作用素論的な証明方法を、Feshbach map を用いず証明が遂行できるように改良することができた。これにより、双極近似のパウリ・フィールツ模型に関しては、これまでより広い範囲の結合定数に対して非存在証明ができるようになり、その限界の厳密な表示を得ることができた。さらに、その限界を上回る大きさの結合定数に関しては、廣島-Spohn の方法を改良することで、その限界値より大きいときは基底状態が現れることがわかった。特に、これまで不明であった結合定数の中間領域では、ある値を境に基底状態が非存在から存在へと変化することがわかった。

また、上記の手法を適用して、その他の模型に応用するための予備的検討を行った結果、副産物として、グラフ上のラプラシアン固有値に関するいくつかの知見を得ることができた。以下に、年度ごとにそれぞれの結果に関して詳しく述べる：

(1) 研究初年度は、廣島文生氏、Herbert Spohn氏との共同研究により、予備的検討で得られていた双極近似のパウリ・フィールツ模型に対する基底状態の非存在（束縛の強化が起きないということ）に関する先行結果を大幅に拡張することに成功した。予備的検討では、Feshbach map を用いたために相互作用の強さを表す結合定数が十分小さいときにしか基底状態の非存在がいえなかった。本研究では、Feshbach map を用いない証明を開発できたので、結合定数への制限が緩くなり、ある程度の大きさの結合定数まで結果を拡張することができた。一方で、結合定数が十分大きいときは、基底状態が存在（束縛の強化が起きるといこと）することが廣島-Spohnの結果によって知られていたが、これに関しても証明法を詳細に検討し、改良することができた。これにより、先行結果における基底状態が存在するための結合定数の大きさの下限を大幅に下げることができた。以上によって、これまで未解決であった結合定数が中間的な領域にあるときは、基底状態が存在するか否かという問題に対して、ある意味でその解答を与えることができた。次のようなものである：非相対論的量子的粒子の質量と短距離型（外力）ポテンシャル V によって定まる定数 K があって、 K は正の数のパラメータ ε ごとに定まる外力ポテンシャルのスケール変換 $V(\varepsilon)$

について不変であり、 $V(\varepsilon)$ を外力ポテンシャルにもつ双極近似のパウリ・フィールツ模型のハミルトニアン $H(\varepsilon)$ について次が成り立つ；

①結合定数が定数 K より小さいときは、任意の正の数 ε にして、 $H(\varepsilon)$ は基底状態を持たない。

②結合定数が $K + \varepsilon$ より大きいときは、 $H(\varepsilon)$ は基底状態を持つ。

このことから定数 K は、基底状態が非存在になる結合定数のよい評価を与えているといえる。また、この定数 K に関する厳密な表示が、外力ポテンシャル V と粒子の質量によって与えられることも示した。ここで用いられた非存在の証明方法は、シュレディンガー作用素（非相対論的量子的粒子のハミルトニアン）の負の固有値の個数評価として知られるビルマン・シュヴィンガーの原理の場の量子への拡張のひとつと考えられるものであり、今後他の模型を研究するときにも有効であると考えられる。

(2) 2年目の研究実施計画は、前年度開発された（双極近似のパウリ・フィールツ模型のハミルトニアンの基底状態を解析するために用いられた）ビルマン・シュヴィンガー型の証明の手法を応用して、双極近似なしのパウリ・フィールツ模型などを含む量子場と相互作用する量子系を記述するさまざまな模型のハミルトニアンの基底状態と結合定数との関係を明らかにし、束縛の強化について詳しく調べることであった。上で述べた非存在証明の方法は、より具体的にいうと、ハミルトニアンを並進対称な作用素とそうでないものに分解し、前者の性質がどのように反映されるかをみるものである。前年に研究された双極近似のパウリ・フィールツ模型では、並進対称な作用素が既存の研究でよくわかっているもの（シュレディンガー作用素）に変形できたので、その性質を場の量子論の文脈へ拡張することができ、基底状態の非存在を証明することが可能となった。2年目に解析をおこなったハミルトニアン（双極近似なしのパウリ・フィールツ模型や二対のネルソン、ポーラ論模型など）の場合は、並進対称な作用素が十分研究されたものではなかったので、予備的研究として、その一般的性質について理解を深める必要性が生じた。並進対称な作用素は運動量ごとのハミルトニアンに（ファイバー）分解可能であることが知られている。そこで、運動量などで分解可能な作用素に関する研究を行った

。特に、（（擬）運動量で分解することが可能な）結晶中を運動する粒子のハミルトニアンのスペクトルについて、詳しく調べた。このような粒子のハミルトニアンは、グラフ上のラプラシアンとみなすことができる。グラフ上のラプラシアンのスペクトルの構造については純数学的な関心も高い。1, 2次元の格子をある一定の法則（ここでは、格子点にペンダントエッジを付加することを考えた）に従って、変形させるとき、その格子（グラフとみなす）上のラプラシアンのスペクトルがどのように変化するかについて調べ、以下のような結果を得た：

① 1次元（結晶）格子を上で述べた法則に従って周期的に変形させると、その変化に応じて、束縛の強化が起きる（この場合は、固有値が現れる）ことがわかった。また、束縛の強化が起きるための必要十分条件も得られた。さらに、1次元格子に対するこの種の変形ではスペクトルにバンドギャップが常に現れることが証明された。

② 2次元格子および六角格子の場合も①と同様の変形によって、束縛の強化が起きることがわかった。スペクトルのギャップについては、1次元格子の場合と異なり変形の仕方によって、スペクトルにギャップが現れたり、ギャップが消えたりすることがわかった。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① F. Hiroshima, H. Spohn, A. Suzuki,
The non-binding regime of the Pauli-Fierz model,
Journal of Mathematical Physics 52 (2011)
062104, 査読有, DOI: 10.1063/1.3598465

〔学会発表〕（計 2 件）

① 鈴木章斗,
Pauli-Fierz 模型の束縛の強化について,
日本数学会, 早稲田大学理工学術院,
2010年3月21日
② Akito Suzuki,
Enhanced binding through coupling to the
quantized electromagnetic Field:
The no-binding regime,
International Conference WIS&E 2011,

National Polytechnic Institute (Mexico city)

2011年11月7日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 章斗 (SUZUKI AKITO)

信州大学・工学部・助教

研究者番号：70585611