

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 18 日現在

機関番号：17102

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22840027

研究課題名（和文）リッチ曲率に関わる幾何学の研究

研究課題名（英文）The geometry related to Ricci curvature

研究代表者

本多 正平 (HONDA SHOUHEI)

九州大学 数理学研究院 助教

研究者番号：60574738

研究成果の概要（和文）：本研究によって得られた結果は以下である：

①リッチ曲率が一樣に下に有界なリーマン多様体の極限空間において，その一次元正則集合が空でなければ，その極限空間はある（境界があってもよい）一次元完備リーマン多様体と等長的である。

②同じくリッチ曲率が一樣に下に有界なリーマン多様体の極限空間を考える．このとき，ここではほとんど至る所，測地線間の角度が定義でき，弱い意味でのそのヘルダー連続性，グロモフ・ハウスドルフ位相に関する連続性が成り立つ．また，そのような極限空間上では何らかの意味で二階微分可能な構造を入れることができ，その二階微分可能な構造に関してリーマン計量は一階微分可能であることがわかり，レヴィ・チビタ接続が一意的に定まることもわかる．また，ディリクレ問題に関する固有関数は二回微分可能であることもわかり，このことから L^2 -空間の中で，二回微分可能な関数からなる空間が稠密であることも従う．

研究成果の概要（英文）：Let Y be a Gromov-Hausdorff limit space of a sequence of complete Riemannian manifolds with a lower Ricci curvature bound. Then we have the following:

1. If the one-dimensional regular set of Y is non-empty, then Y is isometric to a one-dimensional complete Riemannian manifold (with boundary).
2. Let γ_1, γ_2 be a minimal geodesics on Y beginning at a fixed point $p \in Y$. Then the angle between γ_i at p is well defined as long as they can be extended minimally through p .
3. Y has a weakly second differentiable structure and there exists a unique Levi-Civita connection on Y . Every eigenfunction with respect to the Dirichlet problem on Y is second differentiable.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,250,000	375,000	1,625,000
2011年度	1,150,000	345,000	1,495,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：リーマン幾何学

キーワード：リッチ曲率，ラプラシアン，グロモフ・ハウスドルフ収束

1. 研究開始当初の背景

リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の極限空間の研究はその期待される応用の幅広さに対して Cheeger-Colding による一連のものが唯一といってよい状況であった。それは適切な状況では十分なものであると言えるが、例えば崩壊現象などを捉えたい際にはまだ不明な点が多かった。

2. 研究の目的

リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の極限空間の性質を明らかにしていくことが目的である。上記研究背景欄にも述べたが、主に崩壊したときの極限空間の性質を明らかにする。

3. 研究の方法

ラブラシアン、幾何学的測度論を用いて極限空間を調べる。例えば調和座標を用いたボホナーテクニック、Reifenberg の位相的円板定理の証明などがそうである。

4. 研究成果

リッチ曲率が下に有界なリーマン多様体の極限空間において、

- ① こでの始点と同じ二つの測地線を持つてくると、ほとんどのケースに対して、その間の角度が定義できることを示した。これは最近の Colding-Naber の例によって一般には定義できない測地線の組の存在が知られていたため、Ricci 曲率に関わる角度の well-defined 性に関して得られた初めての結果となっている。
- ② しその空間の一次元正則集合が空でなければ、その空間は一次元完備リーマン多様体となる。これは崩壊した極限で、次元の一樣性と、その空間の極めて強い正則性を与えた初めての結果となっている。
- ③ その空間は弱い意味で二階微分可能な構造を持ち、その微分構造に関してリーマン計量は一階微分可能で、レヴィ・チビタ接続が一意的に定まる。また、ディリクレ問題に関する固有関数は二階微分可能になることを示した。近年、測度距離空間上のリッチ曲率の下限の研究が活発に行われているが、そこでは主に空間の一階微分可能性についてのみ言及されることがほとんどである。ここで得られた二階微分可能構造は、リッチ曲率の下限の存在が仮定された特異空間上で初めて言及された二階微分可能性となっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① S. Honda, Bishop-Gromov type inequality on Ricci limit spaces, J.

Math. Soc. Japan, 63 (2011), 419-442.

- ② S. Honda, Ricci curvature and convergence of Lipschitz functions, Comm. Anal. Geom. 19 (2011), 79-158
- ③ S. Honda, On low dimensional Ricci limit spaces, Nagoya Math. J. to appear.

[学会発表] (計 件)

1. 本多正平, リッチ曲率が非負である多様体上の調和関数と多様体の収束, 微分トポロジーセミナー, 2010年4月10日, 京都大学, 口頭発表.
2. 本多正平, Riemann 多様体の収束・崩壊と Ricci 曲率, GCOE tea time, 2010年5月25日, 京都大学, 口頭発表.
3. 本多正平, 非負曲率多様体上の調和関数とリプシッツ関数の収束, 微分幾何火曜セミナー, 2010年6月1日, 筑波大学, 口頭発表.
4. 本多正平, リーマン多様体上の調和関数について, NLPDE セミナー, 2010年6月11日, 京都大学, 口頭発表.
5. 本多正平, 非負曲率多様体上の調和関数とグロモフ・ハウスドルフ収束, 幾何学シンポジウム, 2010年8月8日, 神戸大学, 口頭発表.
6. S. Honda, Differential of Lipschitz functions and Gromov-Hausdorff convergence, 研究集会 Geometry and Probability, 2010年8月26日, 東北大学, 口頭発表.
7. 本多正平, 空間の収束に伴うリプシッツ関数の微分の収束について, 日本数学会 幾何学分科会, 2010年9月25日, 名古屋大学, 口頭発表.
8. 本多正平, 空間と関数を共に動かしたときのソボレフ位相とその応用, 談話会, 2010年10月22日, 東京理科大学, 口頭発表.
9. S. Honda, Ricci curvature and convergence of Lipschitz functions, Doctorial Forum of Mathematics between Fudan and Kyoto universities, 2010年11月5日, Fudan university, 口頭発表.
10. 本多正平, 非負曲率多様体上の調和関数と漸近錘, 研究集会 多様体上の微分方程式, 2010年11月13日, 石川シティカレッジ, 口頭発表.
11. 本多正平, Ricci 曲率と多様体の収束・崩壊と関数空間論, 幾何学セミナー, 2010年11月26日, 九州大学, 口頭発表.
12. 本多正平, 多様体の収束と調和関

- 数, 談話会, 2010年12月20日, 愛媛大学, 口頭発表.
- 1 3. 本多正平, 調和関数と多様体の収束, 研究集会 淡路島幾何学研究集会 2011, 2011年2月12日, 淡路島 国民宿舎 慶野松原荘, 口頭発表.
 - 1 4. 本多正平, Ricci 曲率に関わる多様体の収束・崩壊と関数の収束, 日本数学会 幾何学分科会 特別講演, 2011年3月22日, 早稲田大学, (震災のため中止).
 - 1 5. 本多正平, 多様体の崩壊と一次元正則集合, 幾何学セミナー, 2011年4月22日, 九州大学, 口頭発表.
 - 1 6. 本多正平, 空間と関数の組の収束とその応用, 日本数学会 秋季総合分科会 幾何学分科会 特別講演, 2011年9月30日, 信州大学, 口頭発表.
 - 1 7. 本多正平, 多様体の崩壊と一次元正則集合, トポロジー・幾何セミナー, 2011年11月1日, 広島大学, 口頭発表.
 - 1 8. 本多正平, 多様体の極限と一次元正則点の存在について, 研究集会 多様体上の微分方程式, 2011年11月10日, 金沢大学サテライトプラザ, 口頭発表.
 - 1 9. 本多正平, A weak second differentiable structure on rectifiable metric measure spaces, 第10回環太平洋幾何学会議, 2011年12月5日, 大阪市立大学, 口頭発表.
 - 2 0. 本多正平, 多様体の極限と一次元正則集合, 研究集会 測地線及び関連する諸問題, 2012年1月8日, 熊本大学, 口頭発表.
 - 2 1. 本多正平, リーマン多様体の極限と一次元正則集合, 淡路島幾何学研究集会, 2012年1月29日, 淡路島 国民宿舎 慶野松原荘, 口頭発表.
 - 2 2. 本多正平, Ricci 曲率が下に有界な Riemann 多様体の極限空間について, インフォーマル幾何セミナー, 2012年2月13日, 14日, 筑波大学, 口頭発表.
 - 2 3. 本多正平, A note on one dimensional regular sets, Group actions and K-theory, 2012年3月13日, 京都大学, 口頭発表.
 - 2 4. 本多正平, Ricci 曲率に関わるリーマン幾何と崩壊理論, 第2回 General relativity and mathematics, 2012年3月21日, 東北大学, 口頭発表.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :

番号 :
 出願年月日 :
 国内外の別 :

○取得状況 (計◇件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :
 番号 :
 取得年月日 :
 国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K003933/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者 ()

研究者番号 :

(2) 研究分担者 ()

研究者番号 :

(3) 連携研究者 ()

研究者番号 :

