

## 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 24 年 6 月 13 日現在

機関番号：32606

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010 ～2012

課題番号：22840039

研究課題名（和文） 空間遠方で増大する非局所的な非線型項を持つ非線型シュレディンガー方程式の解析

研究課題名（英文） Analysis on Nonlinear Schrödinger Equations with nonlocal nonlinearity growing at the spatial infinity

研究代表者

眞崎 聡 (MASAKI SATOSHI)

学習院大学・理学部・助教

研究者番号：20580492

研究成果の概要（和文）：半導体のモデル方程式の一つであるシュレディンガー・ポアソン方程式系を空間 2 次元において考察すると、ポアソン方程式の解を与えているニュートン核の形状が  $\log$  型関数になることに起因し、ポアソン方程式で定まる非線型ポテンシャルが遠方で発散するものになる。この状況を一般化し、遠方で増大するような積分核との合成積により与えられる非線型項を持つ非線型シュレディンガー方程式を考える。その高次元からの自然な導出とは対照的に、その扱いは高次元とは全く異なるものが必要となる。本研究では、シュレディンガー方程式固有の保存法則を利用した方程式の変換を新しく導入することによって、この方程式の数学的な取扱いを確立した。その中で、このような非線型が線型ポテンシャルのような効果を含むことが明らかになった。具体的な成果としては、初期値問題のエネルギー空間における時間大域的適切性が得られている。また、調和振動子に現れる 2 次ポテンシャルをとった場合には、非線型方程式にも関わらず解の陽表示が得られた。この解はその挙動を非常に詳細に調べることが可能であるので、非線型性の与える効果の理解にとって非常に役に立つものである。また、この特殊なモデル自体も興味深い例を含んでおり、このモデルを用いることで、安定な励起状態解が存在しうることを例示した。

研究成果の概要（英文）：Two dimensional version of Schrödinger-Poisson system, which is a model equation for semiconductor devices, has a nonlinear potential growing at the spatial infinity due to the fact that the Newtonian kernel, which is a fundamental solution of the Poisson equation in two dimensions, becomes a logarithmic function. Our research concerns Schrödinger equations with a nonlocal nonlinearity given by more general kernels growing at the spatial infinity. Although a derivation is rather simple, this type of equations requires quite different mathematical treatment. We first establish a way to treat this class of nonlinear Schrödinger equations rigorously by introducing a novel transform of equation which is based on conservative quantities of Schrödinger equations. In particular, it turns out that nonlocal nonlinearities of this type contain an effect like a linear potential. Based on this fact, we are able to prove time-global well-posedness result in an energy class. Moreover, when integral kernel is a quadratic function, it turns out that the solutions are written explicitly nevertheless the equation is fully nonlinear. The behavior of this explicit solution, which can be analyzed completely, helps up to understand the effects of nonlinearities which we concern. This example also reveals that there exists a stable excited state.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 22 年度	1,090,000	327,000	1,417,000
平成 23 年度	1,110,000	333,000	1,443,000

年度			
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：函数方程式、シュレディンガー方程式、非線型シュレディンガー方程式、シュレディンガー・ポアソン方程式系、ニュートンポテンシャル、励起状態解

### 1. 研究開始当初の背景

半導体のモデル方程式の一つであるシュレディンガー・ポアソン方程式系に対して、空間次元が3以上のものはその取り扱いがよく知られている。特に、解の存在や一意性などの基本的な問題に加えて、時刻無限大の漸近挙動など、より進んだ内容まで解明されている状況である。たが一方で、低次元、特に2次元の場合には、高次元の場合と比べて方程式の性質が一変するため状況は全く異なっており、解の存在の証明が満足にできていないばかりか、数学的な取扱いについてもきちんと理解がされているとは言い難い状況であった。ここで、考える領域はユークリッド空間全体であるとする。どんなに大きくとも、有界領域の場合に限れば低次元における問題は発生しないためである。この大きな違いはニュートン核の形状に起因している。

近年では、半導体を非常に薄く作ることができるようになってきている。そのような場合には電子が2次元的な振る舞いを示すことが知られている。また、細長い素子の上では電子は一次元的な振る舞いを示すことも知られている。本研究で扱うモデルを考察することによってこのような実際の現象を理解するのに役に立つことが期待される。

我々が考察したいモデルに関する先行結果はいくつかあるが、それらでは、このモデル特有の難しさが現れないように厳しい制限を課して考えられていた。私は、先行研究で、この制限を外して2次元のシュレディンガー・ポアソン方程式系を考え、流体方程式の手法を応用することで、連続関数を初期値に持つクラスに対しては解の時間局所存在を示すことができた。2次元シュレディンガー・ポアソン方程式系は、非常に単純な方程式であるものの、(前述の通り、厳しい制限を課さない場合については)この場合の解の存在結果は全く新しいものであった。ここで用いた手法は、非線型シュレディンガー方程式に対する半古典近似問題の解析を通して生まれた手法である。シュレディンガー方程式の量子流体的な側面に注目し、流体方程式としての性質を用いる。この研究の最大

の不満点は解が大域的であるかどうか分からないことである。一般的に解の大域性には方程式の保存量が利用されるが、用いた手法特有の制約によって、解にどうしても空間方向の連続性が必要となるため、この手法ではシュレディンガー方程式のもつ保存量によって大域解を与えることは期待できない。そこで、全く別の取り扱い方を考えたい。特に、これまで培われてきた「非線型シュレディンガー方程式的」な扱いを確立し、代表的な保存量であるエネルギーが定義できる関数空間の枠組みで、解析を行うことが期待される。

### 2. 研究の目的

低次元におけるシュレディンガー・ポアソン方程式系を非線型項の空間遠方における増大度に関して一般化したモデルを取り扱う。その自然な導出とは対照的に、数学的な取扱いは十分に確立されていない。上述の通り、問題の難しさは、非線型ポテンシャルを与えている積分核が遠方で発散する関数である点にある。これを克服するために、積分核の分解にシュレディンガー方程式特有の保存量を組み合わせる、というアイデアを用いる。これを発展させて、エネルギーが定義できる空間で解きたい。最初の目標はこれを確立することである。

解の存在について分かったら、次にその解の時間大域的挙動を調べる。特に、存在結果を示す手法においては、我々の扱う非線型項は線型ポテンシャルをその主要部として持つことが示唆される。そこで、実際にこの線型ポテンシャルの影響が現れるのか、または解く過程にのみ現れる見かけ上のものなのかを調べたい。さらに、これらを通して本研究で考えている遠方で増大する非局所的な非線型項がいったいどのような影響を与えるのかを理解することが本研究の最終的な目的である。

### 3. 研究の方法

モデルケースとして非局所的な非線型項を与える積分核が  $\log$  関数である場合と、正べき型 ( $|x|^p$  型) の場合を考える。前者は 2 次元のシュレディンガー・ポアソン方程式系に相当する場合であり、後者は 1 次関数のときが 1 次元シュレディンガー・ポアソン方程式系に対応する場合である。数学的な興味から、後者は増大度を一般化させて考える。

先ほども述べたように、問題点は積分核が遠方で増大することから、非線型ポテンシャルが遠方で増大することにある。それによって、これまでにこの分野で用いられてきた手法を適用することができない。この問題を解決するために、方程式固有の保存法則をうまく用いた方程式の変形を考案した。これらを変換によって考える非線型項の特徴をうまく捉えることができ、先行結果の理論の手が届くところへ落とすことができる。

時間大域的な振る舞いの典型例としては、非線型項の影響が時間とともになくなり解が自由解のように振舞う散乱と呼ばれる状態、非線型項の影響が非常に強く解が有限時間で爆発してしまう状態、それらの中間で非線型項の強さと線型作用の強さが釣り合い特定の波形が長時間保たれる定在波解の状態、の 3 つが知られている。これらのどれが起こり得て、どれが起こらないのかを考察する。

#### 4. 研究成果

最初の目的として掲げたのは方程式の取り扱いの確立であった。本研究では、先行結果のアイデアをさらに発展させてより優れた方程式の変形を考案した。この方法によって、増大度が 2 次以下の場合までを取り扱うことができ、エネルギーが定義できるクラスでの解の時間大域適切性を示すことができた。つまり、エネルギーが定義できる解は必ず時間大域的に存在することが分かった。この結果のために用いた方程式の変形は、次の二つのアイデアからなる。

- 一つ目は非線型ポテンシャルの主要部を、無限遠点を中心として積分核をテイラー展開することによって取り出す。このとき取り出された主要部に、質量保存則を組み合わせると、この部分が時間によらない線形ポテンシャルとみなすことができる。この主要部は実際に線形ポテンシャルとして取り扱うことができる。これによって、最初の状態から比べると、線形ポテンシャルが現れるものの、問題であった遠方で発散する非線形項の主要部が取り除かれ、遠方で増大度が 1 次以下がる。もし、遠方で増大度が 1 次以下ならばこのアイデアで、一般の方程式の範疇に落とすことができる。

- 質量中心座標を導入するのが二つ目のアイデアである。これはシュレディンガー方程式特有の運動量保存則を利用するもので、外力がない限り全体としては等速直線運動することを意味している。これを導入することで、先ほどの積分核のテイラー展開を行った際に、主要部の次のオーダーの項が消えることがわかる。積分核の増大度が 1 次より速く、2 次以下ならばこのアイデアを組み合わせることによって、解くことができる。

これらが、方程式の数学的な取扱いの確立、解の存在結果における本研究の成果である。

次に、上述の成果で得られた解についてその時間大域的な振る舞いを調べる研究を行った。積分核がちょうど 2 次関数である場合を考察すると、非線型方程式にも関わらずあらゆる解が陽に書き下せることが分かった。このようなことは、非常に稀な例である。この事実を利用して、積分核が遠方で増大する場合の非線型項が与える影響がかなり理解された。また、このモデルにおける定在波解についても、特に大きな進展が得られた。解の挙動における本研究の成果を、以下の二つにまとめる：

- (1) 遠方で増大する非局所的な非線型項は線型ポテンシャル効果を実際に含んでいることが明らかになった。特に、上述の非線型項の分解はテクニカルな問題ではなく、実際に線型ポテンシャル的な影響が表れており、それが解の振る舞いに線型レベルでの影響を与えることを確かめることができた。また、解の運動は質量中心の運動と質量中心座標系の中での運動にきれいに分かれていることも確かめられた。
- (2) いくつかの興味深い定在波解・進行波解の例を与えることができた。その一例を挙げると、複数のピークが質量中心の周りを同じ周期で回転しながら、質量中心は等速直線運動をするものである。しかも、この定在波解は具体的に書き下せる。さらには、安定な励起状態解が存在することが示された。非線型シュレディンガー方程式の定在波解の理論においては Grillakis-Shatah-Strauss らによる一般論が知られている。本研究で得られたモデルは、この一般論に対して、その適用限界を示す例になっていることが非常に意義深い。

先ほど、解の時間大域挙動として代表的な 3 つのシナリオを紹介したが、まず、すべての解は時間大域的になるので、有限時間で爆発するシナリオは起こらない。定在波解については、上述の通りに大きな成果が得られた。散乱は、本研究で扱うモデルに関しては一番難しい場合であることが分かった。今後さら

に先に進むには、遠方で増大する線型ポテンシャルをもつ線型シュレディンガー方程式の理論の発展が欠かせない。特に、時間大域的な分散型評価、ストリッカーズ評価などの基本的な評価が確立されることが望まれる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

①□ Satoshi Masaki, Semiclassical limit of Schrödinger-Poisson system and Classical limit of quantum Euler-Poisson equations in 2D, 数理解析研究所講究録, 1730, pp.45—57, 査読無, 2010, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kyuroku/contents/1730.html>

② Satoshi Masaki, Local existence and WKB analysis of solutions to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space, Communications in Partial Differential Equations, 55, pp.2253—2278, 査読有, 2010年, DOI: 10.1080/03605301003717142

③ Satoshi Masaki, 非線型 Schrödinger 方程式の準古典解析, 数理解析研究所講究録, 1763, pp.31—52, 査読無, 2011年, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1763.html>

④ Satoshi Masaki, Large time WKB Analysis for multi-dimensional semiclassical Schrödinger-Poisson system, Journal of Differential Equations, 251, pp.3028—3062, 査読有, 2011年, DOI: 10.1016/j.jde.2011.07.030.

⑤ Satoshi Masaki, Energy solution to Schrödinger-Poisson system in the two-dimensional whole space, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 43, pp.2719—2731, 査読有, 2011年, DOI: 10.1137/100792019

[学会発表] (計 4 件)

① 眞崎聡・小川卓克, Schrödinger 方程式に由来するある 2次元量子流体方程式の解析, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 28 日, 東京理科大学

② 眞崎聡, 負の指数を持つ Hartree 方程式の解析, 日本数学会 2011 年度秋期総合分科会, 2011 年 10 月 1 日, 信州大学

③ 前田昌也・眞崎聡, A stable excited s

tate for negative Hartree equation, 日本数学会 2011 年度秋期総合分科会, 2011 年 10 月 1 日, 信州大学

④ Satoshi Masaki, On nonlinear Schrödinger equation with a growing nonlocal interaction, 4<sup>th</sup> MSJ-SI “Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations”, 2011 年 9 月 18 日, 九州大学

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

眞崎 聡 (MASAKI SATOSHI)

学習院大学・理学部・助教

研究者番号: 20580492