

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：12613

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22860026

研究課題名（和文）理論解析に基づく Sinc 数値計算法の実用化に関する研究

研究課題名（英文）Research toward the practical use of Sinc numerical methods based on theoretical analysis

研究代表者

岡山 友昭 (OKAYAMA TOMOAKI)

一橋大学・大学院経済学研究科・特任講師

研究者番号：80587866

研究成果の概要（和文）：Sinc 数値計算法と呼ばれる数値シミュレーション技法が非常に高性能であるとして近年注目されている。ただし、シミュレーションの実行に必要なチューニングパラメータを知る方法は確立されておらず、さらにその収束性は様々な数値実験から経験的に知られていたのみで保証はされていなかった。実用化に向けてこの状況は望ましくない。そこで本研究では理論解析を用いて、チューニングパラメータを知る方法を与え、さらにその収束性を証明した。

研究成果の概要（英文）：Sinc numerical methods have recently been known as highly-efficient numerical simulation technique, but there are two points to be discussed for the practical use. (1) No way has been given to know the tuning parameter, which is indispensable to launch the simulation. (2) The convergence is not guaranteed, but just empirically-observed by some numerical experiments. In this study, by theoretical analysis a way to find the tuning parameter is given, and the convergence is rigorously proved.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	910,000	273,000	1,183,000
2011 年度	1,080,000	324,000	1,404,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,990,000	597,000	2,587,000

研究分野：数値解析

科研費の分科・細目：工学基礎

キーワード：数値解析、Sinc 数値計算法、チューニング、収束証明、理論解析

1. 研究開始当初の背景

自然科学・工学において現れる問題は陽に解を求めることは困難なことが多く、コンピュータを用いて近似計算・シミュレーションを行うのが通常であり、そのために様々な汎用技術が開発されている。特に有名なものが Spline 補間という方法であり、Matlab や Scilab などの著名なソフトウェアにもルーチンが実装されている。

ただし、物理・化学などで現れる問題では、扱う関数がしばしば非常に性質の良い「解析関数」になることが知られており、その場合には Sinc 数値計算法と呼ばれる技法が非常に有効である。実際、海外の Frank Stenger の研究グループによって、微分方程式の初期値問題・境界値問題や、Volterra 積分方程式・Fredholm 積分方程式などに対する高性能な数値解法が提案されてきており（これらは

全て Sinc 数値計算法に基づいた方法である)、その有効性が主張されている。例えば Spline 補間は、区間の分割数 N の増加に対して誤差は多項式オーダーで減少するのに対し、Sinc 数値計算法では誤差は指数オーダーで減少するため、要求精度を達成するのに必要な計算時間が圧倒的に少なくて済む。

Stenger のグループの研究では、Sinc 数値計算法を「Single-Exponential 変換」と呼ばれる変数変換と組み合わせており、SE-Sinc 法と呼ばれる。さらに近年では、その変数変換を「Double-Exponential 変換」と呼ばれる変数変換にすることで、Sinc 数値計算法をさらに高性能化する研究が Masaaki Sugihara をはじめとする我が国の研究グループにより進められている。これは DE-Sinc 法と呼ばれる。

このように Sinc 数値計算法は近年その高性能さが注目され、それに基づいた様々な方程式の数値解法（以下 Sinc スキームと呼ぶ）の開発や、さらなる高性能化などの研究が進められてきた。

2. 研究の目的

本研究の大きな目的は、この高性能な Sinc 数値計算法を実用化するにあたって障害となっていた二つの点を理論解析によって取り除くことである。上述したように数々の方程式に対して Sinc スキームが提案されているものの、それらの多くには以下の共通する二つの難点があった。

一つ目は、Sinc スキームには刻み幅 h の計算式の中に設定すべきチューニングパラメータ「 d 」があるが、この値の定め方が議論されていない点である。この d は計算対象の関数の正則領域の広さ（これはなめらかさを示す指標）を表すパラメータであり、関数が具体的に与えられれば適切な値を調べることができる。ところが、微分方程式や積分方程式の数値解法を考える場合、通常、方程式の解は未知関数であり、直接その関数を調べることは不可能である。

ただしこのパラメータを定めないとそもそも計算が実行できないため、何らかの値で設定する必要がある。ところがこのパラメータ設定をしくじると、Sinc スキームの性能が著しく低下してしまう。Sinc スキームの大きな利点としてその高性能さが挙げられているが、それはパラメータを最適に設定できた場合という条件つきである。方程式を解くような場合の未知関数の最適パラメータを調べることは難しく、その場合どのようにすべきかという問題があった。この点は実用化において非常に重大な問題である。

二つ目は、Sinc スキームがきちんと動作する保証が理論的に与えられていないことである。例えば線形な方程式に対する Sinc ス

キームは、連立 1 次方程式を解かねばならないが、この連立 1 次方程式にきちんと一意な解があるかどうかは自明ではない。当然ながらこの連立 1 次方程式が解けなければ Sinc スキームは破綻する（実行不能）が、解ける保証はされていない。また、仮に解けるとしても、区間の分割数 N を増やすことで正しい方程式の解に近づいていく、という保証もされていなかった。つまり現状では実際に実行してみるまで Sinc スキームはきちんと動作するかどうか分からない状態であった。これは信頼性の問題であり、やはり実用化に際して障害となってしまう。

本研究では、次に述べるように理論解析に基づいて、これらの二つの実用化における問題点を解決する。

3. 研究の方法

研究代表者は、これまでの研究実績として、上述したような Sinc スキームの 2 つの難点を Volterra 積分方程式や Fredholm 積分方程式の場合に対して解決している。本研究が行われる前の状況を表 1 に示す。表のうち、上の二行がこれまでの研究で行われた成果であり、理論解析によって 2 つの難点が解決されている。

表 1. Sinc スキームの難点の状況。

方程式	難点 1	難点 2
Volterra 積分方程式	解決済	解決済
Fredholm 積分方程式	解決済	解決済
微分方程式の初期値問題	本研究	本研究
Volterra 微積分方程式	本研究	本研究
Fredholm 微積分方程式	本研究	本研究

本研究では、このようなこれまでの研究代表者の成果に基づき、表 1 の下の三行に挙げた方程式にも結果を拡張する方法をとる。まず微分方程式の初期値問題は、Volterra 積分方程式に書き換えることで、表 1 の一行目に書いた研究成果を活用することができる。また最後の二行における方程式も、名前からも推測されるように表 1 の一行目と二行目にそれぞれ関係がある方程式であり、うまく工夫して変形することでやはり前研究を活用できる。

このように、下の三行の方程式と、前研究における上の二行の方程式の数学的關係（方程式自身と Sinc スキームいずれに関しても）を明らかにした上で、ギャップを補っていくことで前研究成果を活用して理論解析を進める。ただし理論研究だけでなく、説得力を上げるためには数値実験データをとることも必須であり、特に表 1 の下二行の方程式は他に比べ計算量が必要となる。そのため比較的高性能な計算サーバを構築し実験を行う。

4. 研究成果

当初の計画通りに研究が進み、以下の成果を得た。

(1) 微分方程式の初期値問題に対する Sinc スキームに対して理論解析を行い、難点 1 と難点 2 を解決した。

(2) Volterra 微積分方程式に対する Sinc スキームに対して理論解析を行い、難点 1 と難点 2 を解決した。さらなる成果として、この方程式に対して提案されていた既存の方法 (Sinc-Nyström 法) は、近似解に二重や特殊関数があるために計算に時間がかかるといふ欠点があったため、それを解消した新たな方法 (Sinc 選点法) を開発した。この方法では和は一つしか現れず、関数も初等関数のみであるので、近似解の計算が高速にできるようになった。

(3) Fredholm 微積分方程式に対する Sinc スキームに対して理論解析を行い、難点 1 と難点 2 を解決した。

研究の目的の項で述べた通り、難点 1 の解決なしには、ユーザーは何の指針もなく試行錯誤してパラメータを定めねばならず、また難点 2 の解決なしには、動作保証がなされないため、安心して使うことができない。これらの実用化に対する難点を解決したことは重要である。また難点の解決に加え、(2) のように計算スピードを上げるようなスキームを開発し、より実用で有用になるよう工夫もしている。

また、前研究 (表 1 の上の二行の方程式) に関連して、以下の成果も得た。

(4) Fredholm 積分方程式に対する Sinc スキームに対して、計算中に現れる連立 1 次方程式の係数行列の性質が良いこと (行列の条件数が悪化しないこと) を理論的に示した。

(5) 上記の成果 (4) の内容 (行列の条件数が悪化しないこと) を、Volterra 積分方程式に対する Sinc スキームに対しても理論的に示した。

これらは Sinc スキームの性質が良い (安定して動く) ことを意味し、ユーザーが安心して使える根拠の一つとなる。

さらに隣接するテーマとして、以下の成果も得た。

(6) 前提条件が異なるもとで使われていた Sinc 数値計算公式 (tanh 則と DE 公式) を、同じ前提条件のもとで理論性能評価を行った。これは積分が含まれる方程式に対する収束性解析の基盤となる研究である。

(7) 上の (6) で述べた tanh 則・DE 公式に対して精密な理論誤差評価を行い、精度保証つき数値計算の基盤を作った。

(8) Fredholm 積分方程式に対する Sinc スキームに対して、(7) で述べた研究に基づき精密な理論誤差評価を行った。

これらの研究は Sinc 数値計算法の分野で

精度保証つき数値計算を行うための萌芽的研究であり、さらに実用化を推し進めることのできる重要な成果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

①T. Okayama, T. Matsuo and M. Sugihara: The double-exponential transformation is not always better than the tanh transformation—theoretical convergence analysis, Mathematical Engineering Technical Reports 2011-43, The University of Tokyo, 査読無, December 2011, 37 頁.
<http://www.keisu.t.u-tokyo.ac.jp/research/techrep/data/2011/METR11-43.pdf>

②T. Okayama, T. Matsuo and M. Sugihara: Theoretical analysis of Sinc-Nyström methods for Volterra integral equations, Mathematical Engineering Technical Reports 2011-42, The University of Tokyo, 査読無, December 2011, 26 頁.
<http://www.keisu.t.u-tokyo.ac.jp/research/techrep/data/2011/METR11-42.pdf>

③T. Okayama, T. Matsuo and M. Sugihara: On boundedness of the condition number of the coefficient matrices appearing in Sinc-Nyström methods for Fredholm integral equations of the second kind, JSIAM Letters, 査読有, Vol. 3, 2011, 81-84.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiaml/3/0/3_0_81/_pdf

④T. Okayama, T. Matsuo and M. Sugihara: Improvement of a Sinc-collocation method for Fredholm integral equations of the second kind, BIT Numerical Mathematics, 査読有, Vol. 51, 2011, 339-366.
DOI: 10.1007/s10543-010-0289-x

⑤N. Yamanaka, T. Okayama, S. Oishi and T. Ogita: A fast verified automatic integration algorithm using double exponential formula, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 査読有, Vol. 1, 2010, 119-132.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/nolta/1/1/1_1_119/_pdf

⑥岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: 第二種積分方程式に対する Sinc 選点法の改良とその理論解析, 日本応用数学会論文誌, 査

読有, Vol. 20, 2010, 71-113.
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110007658199/ja/>

〔学会発表〕(計 14 件)

①岡山友昭: 日本応用数学会 2012 年研究部会連合発表会, Volterra 微積分方程式に対する Sinc 選点法と理論解析, 2012 年 3 月 9 日, 九州大学伊都キャンパス.

②岡山友昭: 応用数学合同研究集会, Volterra 微積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の改良と理論解析, 2011 年 12 月 17 日, 龍谷大学瀬田キャンパス.

③岡山友昭: 第 4 回「数理科学セミナー」, 変数変換型数値積分公式およびその発展, 2011 年 11 月 16 日, 一橋大学国立キャンパス.

④鶴島崇, 岡山友昭, 杉原正顯: RIMS 研究集会「科学技術計算における理論と応用の新展開」, 一般化された Ganelius 定理に基づく最適関数近似公式, 2011 年 10 月 26 日, 京都大学数理解析研究所.

⑤T. Okayama: 24th Biennial Conference on Numerical Analysis, Theoretical analysis of Sinc-collocation methods for weakly singular Volterra integral equations of the second kind, 2011 年 6 月 29 日, University of Strathclyde, UK.

⑥岡山友昭: 第 40 回数値解析シンポジウム, Fredholm 微積分方程式に対する Sinc 選点法の改良と理論解析, 2011 年 6 月 20 日, 鳥羽シーサイドホテル, 三重.

⑦岡山友昭: 日本応用数学会 2011 年研究部会連合発表会, 第二種積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の係数行列の条件数の有界性について, 2011 年 3 月 8 日, 電気通信大学.

⑧岡山友昭: Kunitachi One-Day Symposium on Numerical Analysis and Related Topics, 第二種積分方程式に対する Sinc-Nyström 法のチューニングパラメータについて, 2011 年 1 月 29 日, 一橋大学国立キャンパス.

⑨岡山友昭: 応用数学合同研究集会, 常微分方程式の初期値問題に対する様々な Sinc スキームの比較, 2010 年 12 月 16 日, 龍谷大学瀬田キャンパス.

⑩岡山友昭: 東京大学数値解析セミナー, 第二種積分方程式に対する Sinc スキームの

理論解析, 2010 年 10 月 26 日, 東京大学駒場キャンパス.

⑪ T. Okayama: The 14th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN 2010), A posteriori error estimates of Sinc-Nyström methods for Fredholm integral equations of the second kind, 2010 年 9 月 27 日, ENS Lyon, France.

⑫岡山友昭: 日本応用数学会 2010 年度年会, 無限区間の定積分に対する SE 公式・DE 公式の定数を明示的に表した誤差評価, 2010 年 9 月 6 日, 明治大学駿河台キャンパス.

⑬ T. Okayama: The 4th International Conference Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM-4), Theoretical analysis of Sinc-Nyström methods for Volterra integral equations of the second kind, 2010 年 6 月 22 日, Stefan Banach Center, Poland.

⑭岡山友昭: 第 39 回数値解析シンポジウム, tanh 則が有効な関数族に対する DE 公式の誤差評価, 2010 年 5 月 26 日, 鳥羽シーサイドホテル, 三重.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.econ.hit-u.ac.jp/~tokayama/research-ja.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡山 友昭 (OKAYAMA TOMOAKI)

一橋大学・大学院経済学研究科・特任講師
研究者番号: 80587866