

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月25日現在

機関番号：32641

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2010～2011

課題番号：22860057

研究課題名（和文） 組合せ最適化手法を用いた微分代数方程式の最適モデリング

研究課題名（英文） Combinatorial Optimization Approach to
Optimal Differential-Algebraic Equations Modeling

研究代表者

高松 瑞代 (TAKAMATSU MIZUYO)

中央大学・理工学部・助教

研究者番号：70580059

研究成果の概要（和文）：

数値シミュレーションに現れる多くの動的システムは、微分代数方程式(DAE)を用いて記述される。数値シミュレーションの精度向上のために、DAEに対する数値解法が盛んに研究されている。しかし、解の精度をさらに高めるためには、解く技術だけでなく、どの式を解くかが重要な問題になる。本研究課題では、与えられた動的システムの構造情報を利用することで、数値的に解きやすいDAEを導出する手法を開発した。

研究成果の概要（英文）：

Dynamical systems which appear in numerical simulation are often described by differential-algebraic equations (DAEs). In order to improve accuracy of numerical simulation, a great deal of research has been made on numerical solution methods. However, accuracy depends not only on how to solve but also on what to solve. This research has developed methods to obtain DAEs which are easy to solve numerically.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2010年度 | 1,260,000 | 378,000 | 1,638,000 |
| 2011年度 | 1,160,000 | 348,000 | 1,508,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,420,000 | 726,000 | 3,146,000 |

研究分野：組合せ最適化

科研費の分科・細目：工学・工学基礎

キーワード：微分代数方程式，混合解析，行列束，組合せ最適化，数値計算，混合行列理論

1. 研究開始当初の背景

電気回路，機械力学系，化学プラントなどの多くの動的システムは、微分代数方程式(DAE; Differential-Algebraic Equations)を用いて記述される。DAEは微分演算子を含む方程式系であり、常微分方程式にはない解析的・数値的難しさを有する。DAEの常微分

方程式からの遠さを表す指標として指数が定義されており、指数が大きくなるほど数値計算は困難になる。特に、指数2以上のDAEは指数1以下のDAEよりも本質的に難しいことが知られている。代表的な指数には、微分指数，摂動指数，順良指数(tractability index)などがある。線形時不変DAEの場合、これらの指数はすべて係数行列束の

Kronecker 標準形から定まる冪零指数に一致する。

モデル化の手段としての DAE の重要性が認識されるに伴い、DAE を解く数値計算ソフトウェアも整備されてきた。1971 年に、Gear は後退差分法 (BDF) を用いた DAE の計算法を提案した。この手法は、Petzold によるプログラム DASSL に利用されている。また、Hairer & Wanner は、陰的 Runge-Kutta 法に基づく計算法を RADAU5 に実装した。これらのソフトウェアには指数の低い DAE にしか適用できないという欠点がある。最近では、より指数の高い DAE に適用可能なソフトウェアも開発されているが、指数の大きい DAE はその式の特殊性を利用して解くのが一般的である。

回路シミュレーションでは、修正節点解析 (MNA; Modified Nodal Analysis) や混合解析などの解析法を適用して、回路を記述する DAE を導出する。MNA は式を一意に決定するので、非常に扱いやすい。そのため現在もっとも主流な解析法であり、回路シミュレータ SPICE にも導入されている。一方、MNA より自由度のある混合解析は、導出する式が一意に決まらないため、近年はあまり利用されていない。

混合解析は、1939 年に Kron が提案し、1960 年代に甘利と Branin が発展・拡張させた古典的な解析法である。混合解析では、まず素子の分割と基準木を選ぶ。次に、分割と基準木に従って、数値的に解くべき方程式である混合方程式を導出する。混合解析の自由度に着目すると、混合方程式が「最も簡単」になるような分割と基準木の選び方が問題になる。1968 年には、自由変数の個数が最小となる混合方程式 (最小基本方程式) を求めるアルゴリズムが提案された。この問題はマトロイド対の共通独立集合問題を用いて簡潔に記述することができ、組合せ最適化の問題としても興味深いことが知られている。

数値計算の観点からみると MNA が最適な解析法ではないことが、Rohrer (1992) により指摘されている。一方、混合解析は自由度があるため、MNA よりも指数の小さい DAE を導出することがある。回路シミュレーションのさらなる精度向上のためには、混合解析から導出される DAE を指数の観点から解析し、MNA と混合解析のどちらが優れているかを理論的に明らかにする必要がある。

MNA から導出される DAE と混合方程式を比較するためには、それらの指数を解析することが重要である。MNA の指数に対する特徴づけは、Estévez & Tischendorf (2000) によって与えられている。一方、混合方程式の指数の解析には、まだいくつもの課題が残されている。また、回路以外の動的システムを記述する DAE の指数を精度よく高速に計算する手法も開発する必要がある。

2. 研究の目的

DAE 理論は、これまで主に数値解析の分野で研究されてきた。本研究では組合せ最適化手法を利用することで、DAE 理論のさらなる進展を図る。

まず、与えられた動的システムを DAE で記述する際に、「最適モデリング」の概念を取り入れる。具体的には、動的システムを記述する複数の DAE の中で、最小指数の式を求める手法の確立を目指している。さらに、動的システムの構造情報を利用することで、組合せ最適化手法を用いた効率的なアルゴリズムの設計を行う。

本研究で扱うテーマは以下のとおりである。

(1) 混合方程式の指数の解析

これまでの研究において、非線形時変 RLC 回路に対し、混合方程式の最小指数が、MNA から導出される DAE の指数を超えないことを証明した。これは、数値計算の観点から見ると、混合解析は MNA よりも優れていることを意味している。さらに、最小指数の混合方程式を求める組合せ的なアルゴリズムを提案した。

トランジスタなどを含む複雑な回路を記述する際には、従属電源が必要不可欠である。従属電源を持つ回路では、混合方程式の指数が 2 以上になることがあり、RLC 回路よりも扱いにくいことが知られている。従属電源を含む非線形時変回路に対しては、混合方程式の指数が 0 と 1 となる回路の構造的特徴づけがそれぞれ与えられている。本研究では、指数 2 の混合方程式を解析し、構造的特徴付けを与える。この構造的特徴付けを利用することで、DAE の指数を定義通りに計算する必要がなくなり、回路設計の際に大きい指数を避けることができる。さらに、指数に対する構造的特徴付けは、最終的な目標である最小指数の混合方程式を求めるアルゴリズムの設計に役立つと期待される。

(2) 混合行列束の Kronecker 標準形に対する組合せ緩和法の提案

線形時不変 DAE の冪零指数は、行列束 (matrix pencil) の Kronecker 標準形により定義される。行列束とは、各成分の次数が高々 1 の多項式行列である。Kronecker 標準形を精度よく高速に計算するために、様々な計算法が開発されている。

行列の成分を、正確な数値と独立パラメータで区別する混合行列の概念が室田 (1987) により提唱されている。混合行列理論は、電気回路に対する観察により 1980 年代に室田・伊理により提唱された。混合行列では、「誤差を含まない正確な数値」と「物理量を

表す誤差を含む数値」を区別し、後者を独立パラメータと仮定する。単純な電気回路を例にとると、キルヒホッフの保存則の係数は正確な数値である。一方、抵抗値は誤差の影響により公称値とは異なるため、独立パラメータとみなすことができる。このように、数値を二種類に区別するのは数学モデルとして非常に自然な議論であり、様々な分野に応用されてきた。

混合行列の行列束版（多項式行列版）を混合行列束（混合多項式行列）という。これらの行列は、例えば、線形 DAE の係数行列に現れる。混合行列束（混合多項式行列）は、背景にある物理モデルの構造情報を表現可能なので、物理システムを記述する有用な数学的道具として発展してきた。

本研究では、混合行列束の Kronecker 標準形を求める数値誤差に強いアルゴリズムを構築する。本研究により、混合行列束を係数行列とする DAE の指数を効率的かつ精度よく計算することが可能となる。

3. 研究の方法

(1) 混合方程式の指数の解析

混合方程式は、DAE with properly stated leading term と呼ばれるある特殊な形の DAE になることがわかっている。この形の DAE に対して、指数が 2 となる必要十分条件が与えられている。本研究では、この必要十分条件を用いて、指数 2 の混合方程式を解析する。DAE の指数は複数定義されているが、本研究では、回路を記述する DAE の解析によく利用される順良指数を用いる。

(2) 混合行列束の Kronecker 標準形に対する組合せ緩和法の提案

行列束の Kronecker 標準形の計算法は、主に数値解析に分野で広く研究されてきた。一方、組合せ的なアプローチを取り入れることで数値計算の負担を減らすという、数値誤差に強い安定な計算法が室田 (1995)・岩田 (2003) により研究されている。これらの手法は「組合せ緩和法」と呼ばれる。

組合せ緩和法は、組合せ的なアルゴリズムを用いて解の暫定値を求め、その妥当性を確認するステップにおいてのみ数値計算を行うという、画期的な手法である。大部分で組合せ的なアルゴリズムを用いるので効率的なだけでなく、所与の行列束の疎性を保つこともできる。本研究では、これまで行列束および多項式行列に対して研究されてきた組合せ緩和法の枠組みを、混合行列束へ拡張する。

4. 研究成果

(1) 混合方程式の指数の解析

従属電源を含む非線形時変回路に対し、従属電源の素子特性の式に現れる物理特性値が独立パラメータであるという仮定の下で、混合方程式の指数が 2 となる必要十分条件を与えた。この必要十分条件は、Estévez & Tischendorf (2000) によって与えられた MNA の指数が 2 となる十分条件と密接に関係しており、混合解析と MNA の指数の関係を、グラフ構造を用いて明らかにすることができた。

本研究で得られた必要十分条件は、回路にとっては非常に妥当な条件である。従って、本研究により、多くの回路が指数 2 以下になることが示された。

(2) 混合行列束の Kronecker 標準形に対する組合せ緩和法の提案

混合多項式行列の小行列の最大次数を計算する組合せ緩和法を構築した。混合行列束の Kronecker 標準形は多項式行列の小行列の最大次数によって特徴づけられるため、本アルゴリズムにより Kronecker 標準形の効率的な計算法が導かれる。

混合行列束は独立パラメータを含むため、単なる数値計算では Kronecker 標準形を求めることができない。これまでの研究では、付値マトロイド理論という組合せ最適化における大道具を利用した計算法が複数提案されてきた。しかし、これらのアルゴリズムでは多項式行列の数値計算が必要になるため、効率的であるとは言い難い。

本研究では、多項式行列に対する室田 (1995) の組合せ緩和法を、マトロイド理論を用いることで混合多項式行列へ拡張した。本アルゴリズムは定数同士の基本演算しか必要としないため、多項式同士の演算が必要であるという既存研究の欠点を克服している。さらに、本手法を線形付値独立割当問題に適用し、新たなアルゴリズムを導いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① S. Iwata and M. Takamatsu: Computing the maximum degree of minors in mixed polynomial matrices via combinatorial relaxation, *Algorithmica*, to appear. [査読有]
- ② S. Iwata, M. Takamatsu, and C. Tischendorf: Tractability index of hybrid equations for circuit simulation,

Mathematics of Computation, vol. 81,
pp. 923-939, 2012. [査読有]

- ③ S. Iwata and M. Takamatsu: On the Kronecker canonical form of mixed matrix pencils, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 32, pp. 44-71, 2011. [査読有]
- ④ S. Iwata, M. Takamatsu, and C. Tischendorf: Hybrid analysis of nonlinear time-varying circuits providing DAEs with index at most one, *Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2008* (J. Roos and L. R. J. Costa eds.), Springer, pp. 151-158, 2010. [査読有]
- ⑤ M. Takamatsu and S. Iwata: Index characterization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 38, pp. 419-440, 2010. [査読有]

[学会発表] (計 5 件)

- ① 高松瑞代: 指数 2 の混合方程式を導く回路の構造的特徴付け, 日本応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会, 福岡, 2012 年 3 月 8 日.
- ② S. Iwata and M. Takamatsu: Computing the maximum degree of minors in mixed polynomial matrices via combinatorial relaxation, The 15th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO XV), New York, June 16, 2011.
- ③ S. Iwata and M. Takamatsu: On the Kronecker canonical form of mixed matrix pencils, The 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Kyoto, June 2, 2011.
- ④ S. Iwata and M. Takamatsu: On Kronecker canonical form of mixed matrix pencils (poster presentation), SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing (CSC11), Darmstadt, May 19, 2011.
- ⑤ 岩田覚, 高松瑞代: 混合多項式行列の小行列式の最大次数を計算する組合せ緩和

法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2010 年秋季研究発表会, 福島, 2010 年 9 月 17 日.

5. 研究組織

(1) 研究代表者

高松 瑞代 (TAKAMATSU MIZUYO)
中央大学・理工学部・助教
研究者番号: 70580059